Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Kode MK/ Nama MK

Matematika Diskrit

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Cakupan

- Himpunan,
- Relasi dan fungsi
- Kombinatorial
- Teori graf
- **Pohon (*Tree*) dan pewarnaan graf**

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

POHON DAN PEWARNAAN GRAF

Tujuan

- Mahasiswa memahami konsep pohon dan pewarnaan graf.
- Mahasiswa memahami aplikasi minimum spanning tree maupun pewarnaan graf.
- Mahasiswa mampu memahami dan meyelesaikan berbagai persoalan dan fenomena yang terkait dengan pohon dan pewarnaan graf.

Definisi

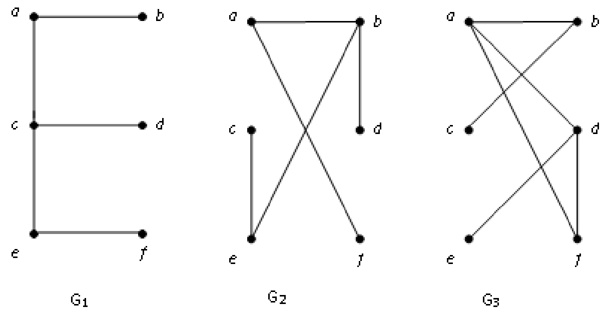
- Pohon (tree) merupakan salah satu bentuk khusus dari struktur suatu graf.
- Misalkan A merupakan sebuah himpunan berhingga simpul (vertex) pada suatu graf G yang terhubung. Untuk setiap pasangan simpul di A dapat ditentukan suatu lintasan yang menghubungkan pasangan simpul tersebut.

Definisi (2)

- Suatu graf terhubung yang setiap pasangan simpulnya hanya dapat dihubungkan oleh satu lintasan tertentu, maka graf tersebut dinamakan **pohon (tree)**.
- Dengan kata lain, pohon merupakan graf tak-berarah yang terhubung dan tidak memiliki siklus maupun sirkuit.

Definisi (3)

- Contoh :



Gambar G1 dan G2 adalah pohon, G3 bukan pohon

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Definisi (4)

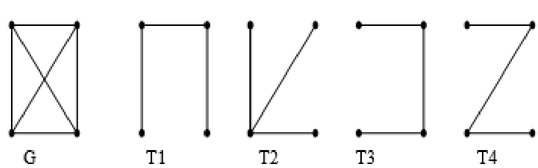
- Hutan (forest) merupakan kumpulan pohon yang saling lepas. Dengan kata lain, hutan merupakan graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon.

Beberapa sifat pohon :

- Misalkan G merupakan suatu graf dengan n buah simpul dan tepat -n – 1 buah sisi. Jika G tidak mempunyai sirkuit maka G merupakan pohon.
- Suatu pohon dengan n buah simpul mempunyai n – 1 buah sisi.
- Setiap pasang simpul di dalam suatu pohon terhubung dengan lintasan tunggal.
- Misalkan G adalah graf sederhana dengan jumlah simpul n, jika G tidak mengandung sirkuit maka penambahan satu sisi pada graf hanya akan membuat satu sirkuit.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pohon Merentang Minimum (Minimun Spenning Tree)

- *Spanning Tree* dari suatu graf terhubung merupakan subgraf merentang (*spanning subgraph*) yang berupa pohon. Pohon merentang diperoleh dengan cara menghilangkan sirkuit di dalam graf tersebut.
- 

Gambar Graf dan Spanning Tree

Pohon Merentang Minimum (Minimun Spenning Tree) (2)

Terlihat bahwa T1, T2, T3, T4 merupakan spanning tree dari graf G. Perlu diperhatikan bahwa setiap graf terhubung berbobot paling sedikit mempunyai satu buah spanning tree. Pohon rentang yang memiliki bobot minimum dinamakan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*). Salah satu contoh aplikasi spanning tree adalah menentukan rangkaian jalan dengan jarak total seminimum mungkin yang menghubungkan semua kota sehingga setiap kota tetap terhubung satu sama lain.

Cara Menentukan Minimum Spanning Tree

1. Algoritma Prim
2. Algoritma Kruskal

Algoritma Prim

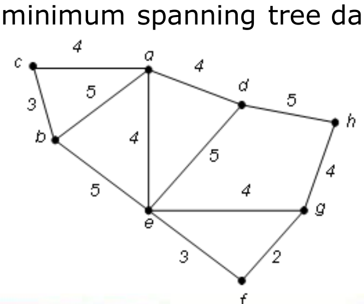
Langkah-Langkah Algoritma Prim

- Pilih sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.
- Pilih sisi (u, v) dalam G yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T, dengan syarat sisi tersebut tidak membentuk sirkuit di T. Masukkan (u, v) ke dalam T.
- Ulangi langkah 2 sebanyak n – 2 kali.

Algoritma Prim (2)

- Jumlah langkah seluruhnya dalam algoritma Prim adalah sebanyak jumlah sisi di dalam spanning tree dengan n buah simpul, yaitu (n – 1) buah.
- Contoh 5.1 :

  Tentukan minimum spanning tree dari graf dibawah ini :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Algoritma Prim (3)

Jawab :

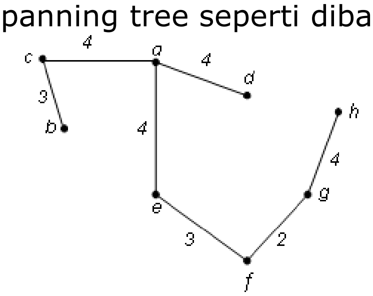
- Pilih sisi fg sehingga kita mempunyai T ({f, g}, fg)
- Langkah selanjutnya dapat dipilih sisi ef karena sisi tersebut berbobot minimum yang bersisian dengan simpul f .
- Selanjutnya pilih sisi ae atau gh karena sisi tersebut berbobot minimum yang bersisian dengan simpul pada T, yaitu e dan g.

15 8/29/2014

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Algoritma Prim (4)

- Jika proses ini dilanjutkan terus maka akan diperoleh minimum spanning tree seperti dibawah ini :



- Terlihat bahwa spanning tree tersebut mempunyai total bobot 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 = 24.

16 8/29/2014

Algoritma Kruskal

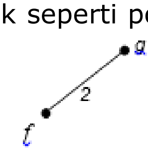
- Langkah-langkah dalam algoritma Kruskal agak berbeda dengan algoritma Prim. Pada algoritma Kruskal, semua sisi dengan bobot yang minimal dimasukan kedalam T secara berurutan.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

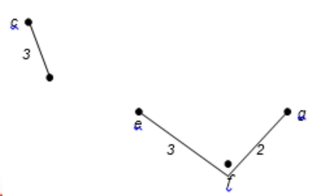
Algoritma Kruskal (2)

Langkah-Langkah Algoritma Kruskal :

Langkah I : T berbentuk seperti pohon berikut



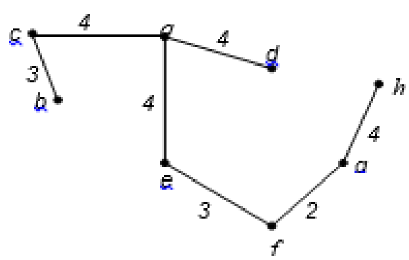
Langkah II : memasukan sisi-sisi yang berbobot 3 kedalam sehingga T berbentuk



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Algoritma Kruskal (3)

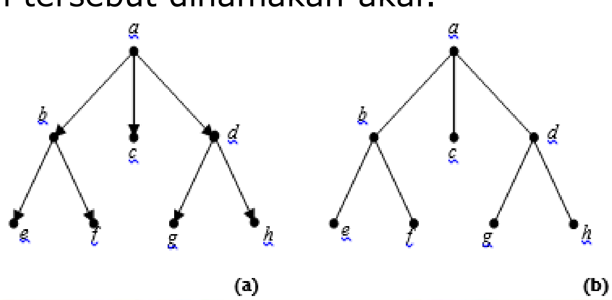
Langkah III : memasukan sisi-sisi yang berbobot 4 kedalam sehingga akhirnya diperoleh minimum spanning tree berikut :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pohon Berakar

- Pada suatu pohon, yang sisi-sisinya diberi arah sehingga menyerupai graf berarah, maka simpul yang terhubung dengan semua simpul pada pohon tersebut dinamakan akar.



Pohon Berakar (2)

- Suatu pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar maka pohon tersebut dinamakan pohon berakar (rooted tree), lihat gambar (a). Simpul yang berlaku sebagai akar mempunyai derajat masuk sama dengan nol. Sementara itu, simpul yang lain pada pohon itu memiliki derajat masuk sama dengan satu. Pada suatu pohon berakar, Simpul yang memiliki derajat keluar sama dengan nol dinamakan daun. Selanjutnya, komponen arah biasanya diabaikan sehingga pohon berakar digambarkan seperti graf tak berarah pada gambar 5.3 (b)

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Terminologi Pohon Berakar

a. Anak (*child atau children*) dan Orangtua (*parent*)

Jika ada satu sisi antara dua simpul maka simpul yang lebih dekat dengan akar dinamakan orang tua sedangkan sisi yang lain dinamakan anak. Pada gambar 5.3 terlihat bahwa b, c, dan d adalah anak-anak simpul a, dan a merupakan orangtua dari anak-anak itu. Sementara itu, g dan h merupakan anak dari d, sedangkan d merupakan orang tua dari g dan h.

Selanjutnya, a dinamakan leluhur (*ancestor*) dari e, f, g dan h. sedangkan e, f, g dan h dinamakan keturunan (*descendant*) dari a. Sementara itu, f adalah saudara kandung (sibling) e, tetapi, g bukan saudara kandung e, karena orangtua mereka berbeda.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Terminologi Pohon Berakar (2)

b. Lintasan (*path*)

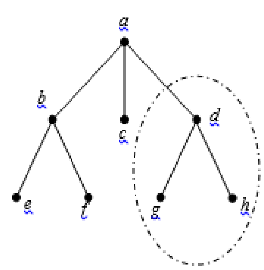
Lintasan dari a ke h adalah a, d, h. dengan panjang lintasannya adalah 2. Pada suatu pohon, lintasan antara dua simpul sembarang adalah unik, yaitu hanya ada satu lintasan.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Terminologi Pohon Berakar (3)

c. *Subtree* (Upapohon)

Misalkan d adalah suatu simpul pada pohon, maka subgraf (pohon) yang terdiri dari d bersama dengan seluruh keturunannya dinamakan *subtree*. Pada contoh dibawah ini, yang di dalam lingkaran merupakan *subtree* dari pohon utamanya.



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Terminologi Pohon Berakar (4)

d. Derajat (degree)

Derajat sebuah simpul adalah jumlah anak pada simpul tersebut.

Pada gambar sebelumnya :

- Simpul yang berderajat 0 adalah simpul c, e, f, g, dan h
- Tak ada simpul yang berderajat 1.
- Simpul yang berderajat 2 adalah simpul b dan d.
- Simpul yang berderajat 3 adalah simpul a.

Jadi, derajat yang dimaksudkan di sini adalah derajat-keluar. Derajat maksimum dari semua simpul merupakan derajat pohon itu sendiri. Jadi, pohon pada gambar sebelumnya berderajat 3

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Terminologi Pohon Berakar (5)

e. Daun (leaf)

Simpul yang berderajat nol (atau tidak mempunyai anak) disebut daun. Simpul c, e, f, g dan h adalah daun.

f. Simpul Dalam (internal vertex)

Simpul (selain akar) yang mempunyai anak disebut simpul dalam. Simpul b dan d dinamakan simpul dalam.

g. Tingkat (level)

Akar mempunyai level sama dengan 0, sedangkan simpul yang lain bergantung pada posisi masing-masing. Misalkan, pada gambar sebelumnya, terlihat bahwa b, c dan d berada pada tingkat 2. Sedangkan e, f, g dan h berada pada tingkat 3.

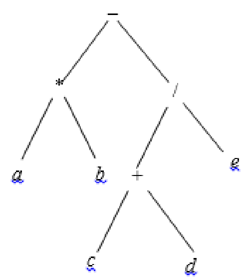
Pohon Berakar (3)

- Pohon berakar yang urutan anak-anaknya penting (diperhatikan) maka pohon yang demikian dinamakan pohon terurut (ordered tree). Sedangkan, pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak n buah anak disebut pohon n-ary. Jika n = 2, pohonnnya disebut pohon biner (binary tree).

Contoh Pohon Biner

1. Pohon Ekspresi

   Ekspresi aritmetika (a * b) – ((c + d) / e) dapat dinyatakan dalam suatu pohon biner, dimana peubah sebagai daun dan operator aritmetika sebagai simpul dalam dan akar.

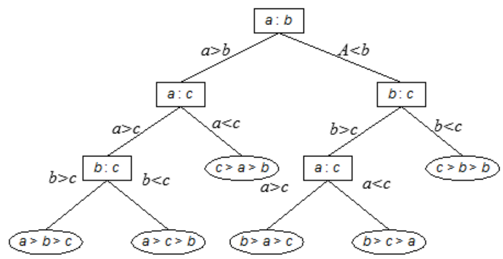


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh Pohon Biner (2)

2. Pohon keputusan (*Decision Tree*)

Suatu pohon dimana internal vertexnya berkorespondensi dengan sebuah keputusan dinamakan pohon keputusan. Salah satu kegunaan pohon keputusan adalah dalam memilah-milah kompleksitas dari berbagai jenis algoritma.



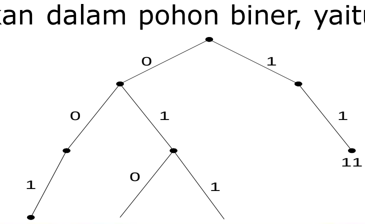
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh Pohon Biner (3)

3. Kode awalan (*prefix code*)

Kode awalan merupakan himpunan kode (salah satunya adalah kode biner) sedemikian sehingga tidak ada anggota himpunan yang merupakan awalan dari kode yang lain.

Contoh : {001, 010, 011, 11} merupakan kode awalan, jika dinyatakan dalam pohon biner, yaitu :



Contoh Pohon Biner (4)

4. Kode Hufman

Pengkodean Hufman sering sekali digunakan dalam bidang kompresi data. Perhatikan tabel kode ASCII berikut ini :

Simbol	Kode ASCII
A	01000001
B	01000010
C	01000011
D	01000100

Jadi rangkaian bit untuk string 'ADABACA' , dapat direpresentasikan dalam bentuk : 01000001010001000100 00010100000100100000101000011010000001

Panjang kode dari string tersebut adalah 7 $\times$ 8 = 56 bit (7 byte).

Contoh Pohon Biner (5)

4. Kode Hufman (Lanjutan)

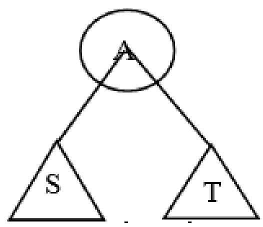
Simbol	Kekerapan	Peluang	Kode Huffman
A	4	4/7	0
B	1	1/7	10
C	1	1/7	11
D	1	1/7	110

Sehingga rangkaian bit untuk string ' ADABACA': 01100100110

atau yang semula panjangnya 56 bit cukup dituliskan dalam 11 bit.

Penelusuran Pohon Biner

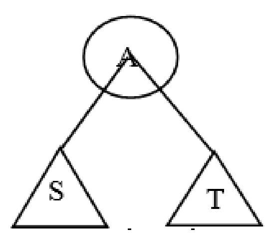
- Misalkan, berikut ini adalah pohon biner dimana A merupakan akar pohon biner tersebut. Sementara itu, S dan T merupakan upapohon (subtree) dari pohon biner.



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Jenis Penelusuran Pohon Biner

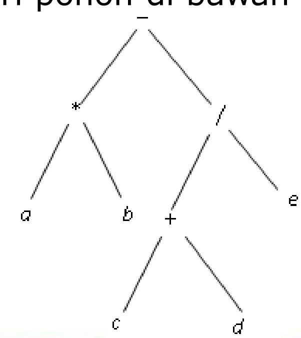
1. Preorder : A, S, T
   - kunjungi A
   - kunjungi S secara preorder
   - kunjungi T secara preorder
2. Inorder : S , A, T
   - kunjungi S secara inorder
   - kunjungi A
   - kunjungi T secara inorder
3. Postorder : S, T , A
   - kunjungi S secara postorder
   - kunjungi T secara postorder
   - kunjungi A



Jenis Penelusuran Pohon Biner (2)

- Contoh :

  Tentukan hasil penelusuran preorder, inorder, dan postorder dari pohon di bawah ini :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Jenis Penelusuran Pohon Biner (3)

- Jawab :

preorder	:	– * a b / + c d e	(prefix)
inorder	:	*a* * b – c + d / e	(infix)
postorder	:	*a* b * c d + e / –	(postfix)

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Graf

- Pewarnaan dari suatu graf G merupakan suatu pemetaan dari sekumpulan warna ke beberapa simpul (vertex) yang ada pada graf G sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Selain pewarnaan simpul, dikenal pula pewarnaan sisi pada suatu graf. Namun dalam bab ini hanya akan difokuskan pada pewarnaan simpul.
- Suatu graf G dikatakan berwarna n jika terdapat n warna dalam pewarnaan graf G tersebut. Banyak warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan suatu graf dinamakan bilangan kromatik, yang dinotasikan oleh $\chi(G)$ (χ : dibaca chi).

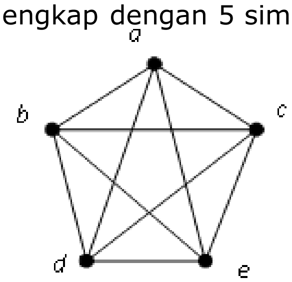
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Graf (2)

- Contoh :

  Bilangan kromatik suatu graf lengkap-n (Kn) adalah n. Hal ini disebabkan karena setiap simpul pada graf lengkap adalah bertetangga. Jadi χ(Kn) = n.

  Perhatikan graf lengkap dengan 5 simpul berikut ini :



maka untuk mewarnai graf tersebut diperlukan 5 warna.

Pewarnaan Graf (3)

Algoritma Welch-Powell dalam pewarnaan suatu graf G dapat diilustrasikan sebagai berikut :

1. Urutkan semua simpul pada graf G berdasarkan derajat masing-masing simpul, dari besar menjadi kecil. Urutan tersebut tidak unik karena beberapa simpul mungkin mempunyai derajat yang sama.
2. Gunakan warna pertama untuk mewarnai simpul pertama dan simpul lain yang berada pada urutan sepanjang simpul tersebut tidak bertetangga dengan simpul sebelumnya.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

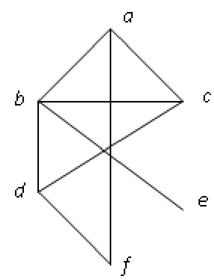
Pewarnaan Graf (4)

3. Berikan warna kedua untuk mewarnai simpul pada urutan tertinggi (yang belum diwarnai), lakukan seperti point sebelumnya.
4. Seperti point ketiga, dilakukan terus menerus sehingga setiap simpul pada graf tersebut menjadi berwarna semua.
5. Algoritma Welch-Powell hanya memberikan batas atas untuk bilangan kromatik. Dengan demikian, algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan graf.

Pewarnaan Graf (5)

- Contoh :

  Gunakan algoritma Welch-Powell untuk pewarnaan graf berikut ini :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Graf (6)

- Contoh : (Lanjutan)

  Terlihat bahwa urutan derajat masing-masing simpul adalah sebagai berikut :

a	b	c	d	e	f
4	3	3	3	2	1

  Dengan demikian, dapat dilakukan pewarnaan sebagai berikut :

  Warna I untuk simpul : b, f

  Warna II untuk simpul : a, d, e

  Warna III untuk simpul : c

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Graf (7)

Misalkan G merupakan suatu graf, pernyataan berikut adalah ekivalen:

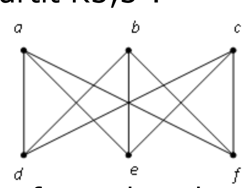
- G merupakan graf bipartite
- Bilangan kromatik G adalah dua ($\chi(G)$ = 2)
- Setiap sirkuit dari G mempunyai panjang yang genap

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Graf (7)

- Contoh :

  Perhatikan graf bipartit K3,3 :



Pewarnaan pada graf tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan dua warna, yaitu :

- Warna I untuk simpul a, b, c

- Warna II untuk simpul d, e, f

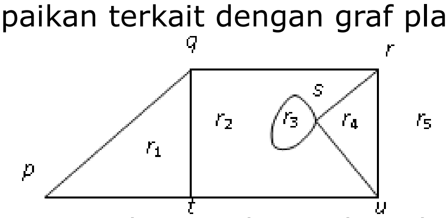
Pewarnaan Graf (8)

- Contoh : (Lanjutan)

  Sementara itu, jika kita ingin membuat suatu sirkuit pada graf tersebut, maka sirkuit tersebut akan melewati 3 atau 5 simpul yang lain sebelum kembali ke simpul awal. Sehingga sirkuit tersebut memiliki panjang yang genap

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*)

- Sebelum membahas tentang pewarnaan daera pada suatu graf planar, perhatikan beberapa definisi yang akan disampaikan terkait dengan graf planar berikut ini:



- Area r1, r2, r3, r4, dan r5 dinamakan daerah (region) dari graf planar tersebut. Dua buah daerah dalam suatu graf planar dikatakan bertetangga jika mereka paling sedikit mempunyai sebuah sisi bersama.

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (2)

- Contoh daerah yang bertetangga adalah :
  - r1 dan r2
  - r2 dan r3
  - r2 dan r5
  - r4 dan r5
  - r1 dan r5
  - r2 dan r4

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (3)

- Sementara itu, contoh daerah yang tidak bertetangga adalah :
  - r1 dan r4
  - r5 dan r3
  - r3 dan r4
- Jumlah daerah yang bertetangga dengan suatu daerah pada suatu graf dieroleh dengan cara menghitung jumlah daerah yang palig sedikit mempunyai satu sisi bersama dengan daerah tersebut.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (4)

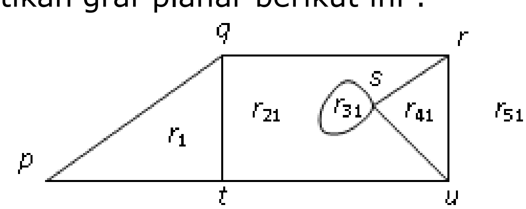
- Dengan demikian, masing-masing daerah pada graf tersebut mempunyai daerah tetangga sebagai berikut:
  - r1 mempunyai 2 daerah tetangga yaitu r2 dan r5
  - r2 mempunyai 3 daerah tetangga yaitu r1, r3 dan r5
  - r3 mempunyai 1 daerah tetangga yaitu r2
  - r4 mempunyai 2 daerah tetangga yaitu r2 dan r5
  - r5 mempunyai 3 daerah tetangga yaitu r1, r2 dan r4
- Pewarnaan daerah (peta) pada suatu graf planar G merupakan pemetaan sekumpulan warna ke beberapa daerah yang berada pada graf planar tersebut sedemikian sehingga daerah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (5)

- Contoh :

Perhatikan graf planar berikut ini :



Lakukan pewarnaan daerah dengan menggunakan :

a. 3 warna
b. 2 warna

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (5)

- Jawab :

  a. Pewarnaan graf dengan 3 warna :

  Warna I untuk daerah r1 dan r4

  Warna II untuk daerah r2

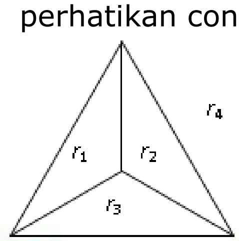
  Warna III untuk daerah r3 dan r5

  b. Pewarnaan graf dengan 2 warna, tidak mungkin dapat dilakukan. Hal ini disebabkan karena daerah r2 , r4 dan r5 bertetangga satu sama lain, sehingga harus diberikan warna yang berbeda.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (6)

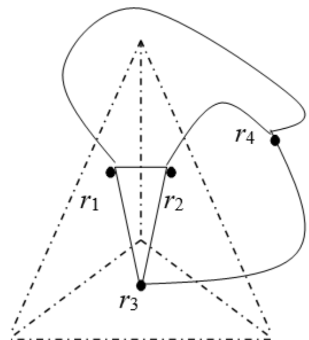
- Dual dari pewarnaan peta adalah berupa pewarnaan simpul dari suatu graf planar. Perhatikan bahwa suatu pewarnaan pada graf G akan menghubungkan ke suatu pewarnaan simpul dari dual G*. Dengan kata lain, sebuah peta G adalah berwarna n jika dan hanya jika graf planar dari dual G* dengan warna n. Agar kebih jelas, perhatikan contoh graf berikut :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (7)

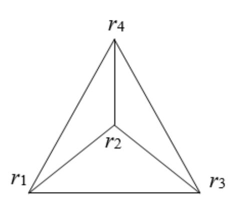
- Pilih sebuah simpul dalam setiap daerah pada graf tersebut, hubungkan dua simpul tersebut dengan suatu sisi jika dua daerah tersebut saling bertetangga.



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Pewarnaan Peta (*Map Coloring*) (8)

- Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh graf sebagai berikut :



- Jadi, pewarnaan peta dapat direpresentasikan dalam pewarnaan simpul. Yang lebih penting dalam pewarnaan ini adalah model graf yang diberikan merupakan representasi dari permasalahan nyata.

Rangkuman

- Suatu graf terhubung yang setiap pasangan simpulnya hanya dapat dihubungkan oleh satu lintasan tertentu, maka graf tersebut dinamakan **pohon (tree)**. Dengan kata lain, pohon merupakan graf tak-berarah yang terhubung dan tidak memiliki siklus maupun sirkuit.
- *Spanning Tree* dari suatu graf terhubung merupakan subgraf merentang (*spanning subgraph*) yang berupa pohon.
- Pohon rentang yang memiliki bobot minimum dinamakan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Rangkuman (2)

- Ada beberapa terminologi pohon yang perlu diketahui, antara lain : akar, daun, subtree, lintasan terpendek, dan lain lain.
- Untuk menentukan minimum spanning tree terdapat dua algoritma, yaitu Prim dan Kruskal.
- Pewarnaan dari suatu graf G merupakan suatu pemetaan dari sekumpulan warna ke beberapa simpul (vertex) yang ada pada graf G sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Selain pewarnaan simpul, dikenal pula pewarnaan sisi pada suatu graf.

Rangkuman (3)

- Banyak warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan suatu graf dinamakan bilangan kromatik, yang dinotasikan oleh $\chi(G)$ (χ : dibaca chi).
- Pewarnaan peta (map) merupakan dual dari pewarnaan simpul suatu graf.

THANK YOU