Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Kode MK/ Nama MK

Matematika Diskrit

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Cakupan

- Himpunan,
- **Relasi dan fungsi**
- Kombinatorial
- Teori graf
- Pohon (*Tree*) dan pewarnaan graf

Relasi dan Fungsi

Tujuan

- Mahasiswa memahami konsep relasi dan fungsi.
- Mahasiswa memahami berbagai macam operasi dan sifat relasi.
- Mahasiswa dapat meyelesaikan berbagai persoalan dan fenomena yang terkait denganrelasi dan fungsi.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Definisi

- Relasi antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu. Jadi, relasi biner R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari cartesian product $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.
- Notasi dari suatu relasi biner adalah a R b atau $(a, b) \in R$. Ini berarti bahwa a dihubunganukan dengan b oleh R. Suatu unsur dalam cartesian product yang bukan merupakan unsur relasi dapata dinyatakan dengan a R b atau $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R. Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (range) dari R.

contoh

Misalkan A = {2, 3, 4} dan B = {2, 4, 8, 9, 15}.
Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

Tentukan unsur-unsur R!
Jawab :

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, cartesian product $A \times B$ adalah :

$A \times B$ = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 9), (2, 15), (3, 2), (3, 4), (3, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 2), (4, 4), (4, 8), (4, 9), (4, 15)}

Dengan menggunakan definisi relasi diatas, relasi R dari A ke B yang mengikuti aturan tersebut adalah :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15) }

Relasi dapat pula terjadi hanya pada sebuah himpunan, yaitu relasi pada A.. Relasi pada himpunan A merupakan himpunan bagian dari cartesian product $A \times A$.

Cara Menyajikan suatu Relasi

- Penyajian Relasi dengan Diagram Panah
- Penyajian Relasi berupa Pasangan Terurut
- Penyajian Relasi dengan Tabel
- Penyajian Relasi dengan Matriks
- Penyajian Relasi dengan Graf Berarah

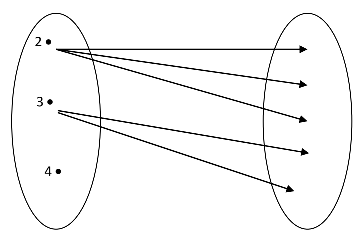
Relasi dengan Diagram Panah

Misalkan A = {2, 3, 4} dan B = {2, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

(a, b) $\in$ R jika a faktor prima dari b

maka relasi tersebut dapat digambarkan dengan diagram panah :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi dengan Pasangan Terurut

Contoh relasi pada diagram panah dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, yaitu :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)}

Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil. Relation yang telah dijelaskan pada relasi diagram panah dapat direpresentasikan sebagai berikut:

Tabel 2.1 Relasi 'Faktor Prima Dari'

A	B
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi dengan diagram Matriks

Misalkan R merupakan relasi yang menghubungkan himpunan A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan himpunan B = $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu :

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Unsur-unsur m_{ij} pada matriks itu bernilai satu atau nol, tergantung apakah unsur a_i pada himpunan A mempunyai relasi dengan unsur b_j pada himpunan B. Pernyataan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi dengan diagram Matriks cont...

Contoh :

Misalkan A = {2, 3, 4} dan B = {2, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :
(a, b) ∈ R jika a faktor prima dari b

maka relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi dengan Graf Berarah

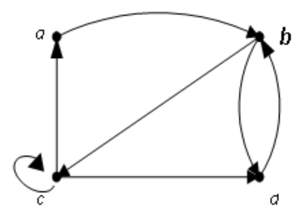
Relasi pada sebuah himpunan dapat disajikankan secara grafis dengan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf berarah didefinisikan hanya untuk merepresentasikan relasi pada suatu himpunan (bukan antara dua himpunan). Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau vertex), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (arc). Jika (a, b) ∈ R, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut simpul asal (initial vertex) dan simpul b disebut simpul tujuan (terminal vertex). Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut loop

Relasi dengan Graf Berarah cont..

Contoh :

Misalkan R = {(a, b), (b, c), (b, d), (c, c) (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}.

Relasi R dapat di sajikan dalam bentuk graf berarah yaitu :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Sifat Relasi

- Refleksif (*reflexive*)
- Transitif *(transitive)*
- Simetri *(symmetric)* dan Anti Simetri *(Antisymmetric)*

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Refleksif (*reflexive*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Dengan kata lain, suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh:

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R adalah relasi '≤' yang didefinisikan pada himpunan A, maka
R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3),(1, 4), (2, 2), (2, 3), (2,4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}
Terlihat bahwa (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) merupakan unsur dari R. Dengan demikian R dinamakan bersifat refleksif.

Contoh:

Misalkan A = {2, 3, 4, 8, 9, 15}.
Jika kita definisikan relasi R pada himpunan A dengan aturan :
$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b
Perhatikan bahwa $(4, 4) \notin R$.
Jadi, jelas bahwa R tidak bersifat refleksif.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Refleksif (*reflexive*) cont…

Sifat refleksif memberi beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang unsur diagonal utamanya semua bernilai 1, atau mii = 1, untuk i = 1, 2, …, n,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Relasi yang bersifat refleksif jika disajikan dalam bentuk graf berarah maka pada graf tersebut senantiasa ditemukan loop setiap simpulnya

Transitif (*transitive*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **transitif** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh:

Misalkan A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, dan relasi R didefinisikan oleh :

a R b jika dan hanya jika a membagi b, dimana $a, b \in A$,

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8)}

Ketika $(2, 4) \in R$ dan $(4, 8) \in R$ terlihat bahwa $(2, 8) \in R$.

Dengan demikian R bersifat transitif.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Transitif (*transitive*) cont...

Contoh :

R merupakan relasi pada himpunan bilangan asli N yang didefinisikan oleh:

R : $a + b = 5$, $a, b \in A$,

Periksa, apakah relasi R bersifat transitif!

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

R = {(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) }

Perhatika bawa $(1, 4) \in R$ dan $(4, 1) \in R$, tetapi $(1, 1) \notin R$.

Dengan demikian R tidak bersifat transitif

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Transitif (*transitive*) cont…

Sifat transitif memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

- sifat transitif pada graf berarah ditunjukkan oleh kondisi: jika ada busur dari a ke b dan busur dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.
- Pada saat menyajikan suatu relasi transitif dalam bentuk matriks, relasi transitif tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **simetri** jika $(a, b) \in R$, untuk setiap $a, b \in A$, maka $(b, a) \in R$. Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak simetri jika $(a, b) \in R$, sementara itu $(b, a) \notin R$. Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan **anti simetri** jika untuk setiap $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ berlaku hanya jika $a = b$. Perhatikanlah bahwa istilah simetri dan anti simetri tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) dimana $a \neq b$.

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*) cont…

Contoh:

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika $a - b \in Z$.

Periksa apakah relasi R bersifat simetri !

Jawab :

Misalkan *a* R b maka $(a - b) \in Z$, Sementara itu jelas bahwa $(b - a) \in Z$. Dengan demikian R bersifat simetri.

Contoh:

Tunjukan bahwa relasi '$\leq$' pada himpunan Z. bersifat anti simetri

Jawab :

Jelas bahwa jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = b$.

Jadi relasi '$\leq$' bersifat anti simetri.

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*) cont…

Contoh :

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan asli N merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika a = b. Sementara itu, relasi "habis membagi" merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka a = b.

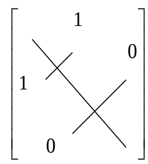
Contoh :

Misalkan relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3) } maka relasi R merupakan relasi yang simetri sekaligus relasi yang anti simetri.

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*) cont…

Sifat simetri dan anti simetri memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian berbentuk matriks maupun graf, yaitu :

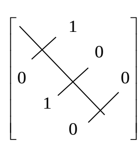
- Relasi yang bersifat simetri mempunyai matriks yang unsur-unsur di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari unsur-unsur di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ adalah :



Relasi yang bersifat simetri, jika disajikan dalam bentuk graf berarah mempunyai ciri bahwa jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*) cont…

- Relasi yang bersifat anti simetri mempunyai matriks dimana unsurnya mempunyai sifat: jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi anti simetri memenuhi kondisi: jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat anti simetri mempunyai ciri bahwa tidak akan pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*) cont…

Misalkan, R merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, yang dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan oleh :

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh :

Misalkan P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15}.
Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q yaitu :
$(p, q) \in R$ jika dan hanya jika p habis membagi q
maka kita peroleh :
R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)}
R^{-1} merupakan invers dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P yang berbentuk :
$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p
sehingga diperoleh :
R^{-1} = {(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3) }

Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*) cont…

Jika M adalah matriks yang menyajikan suatu relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan transpose terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Operasi pada Relasi

Relasi merupakan himpunan pasangan terurut maka beberapa operasi aljabar yang berlaku pada himpunan, juga beraku pada relasi. Operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup juga berlaku atara dua relasi. Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga merupakan relasi dari A ke B.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Operasi pada Relasi cont…

Contoh :

Misalkan A = {*a*, b, c} dan B = {*a*, b, c, d}.
Relasi R_1 = {(*a*, *a*), (b, b), (c, c)}
Relasi R_2 = {(*a*, *a*), (*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}
Maka :
$R_1 \cap R_2$ = {(*a*, *a*)}
$R_1 \cup R_2$ = {(*a*, *a*), (b, b), (c, c), (*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}
$R_1 - R_2$ = {(b, b), (c, c)}
$R_2 - R_1$ = {(*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}
$R_1 \oplus R_2$ = {(b, b), (c, c), (*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}

Misalkan, relasi R_1 dan R_2 masing-masing disajikan dalam bentuk matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$ dan $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Operasi pada Relasi cont…

Contoh :

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan T adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan T ο R, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{untuk suatu } b \in B \text{ sehingga } (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Operasi pada Relasi cont…

Contoh :

Misalkan, A = {*a*, b, c}, B = {2, 4, 6, 8} dan C = {s, t, u}

Sementara itu, relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

R = {(*a*, 2), (*a*, 6), (*b*, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)}

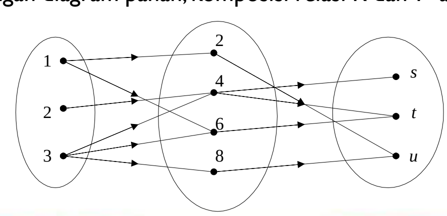
Sedangkan relasi dari himpunan B ke himpunan C didefisikan oleh :

T = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}

Maka komposisi relasi R dan T adalah

T ο R = {(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u) }

Jika disajikan dengan diagram panah, komposisi relasi R dan T adalah :



Operasi pada Relasi cont...

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah :

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

dimana $M_{R1} \cdot M_{R2}$ merupakan perkalian antara dua buah matriks, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan logika "$\wedge$" (dan), sedangakan tanda tambah diganti dengan logika "$\vee$" (atau).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Operasi pada Relasi cont...

Contoh 2.17 :

Misalkan relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} . M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut

Sebuah relasi pada himpunan A dinamakan **relasi ekivalen** jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif. Dua unsur yang berelasi ekivalen disebut equivalent.

Contoh :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah Z, yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika a = b atau a = – b .

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

Jawab :

- Jelas bahwa a = a, dengan kata lain jika a R a untuk setiap a ∈ Z .
  Jadi R merupakan relasi refleksif.
- Jika a = ±b dan b = ± c, ini mengakibatkan a = ± c. Dengan kata lain jika a R b maka b R c maka a R c.
  Dengan demikian R merupakan relasi transitif.
- Jika a = b atau a = – b maka b = a atau b = – a, dengan kata lain jika a R b maka b R a.
  Jadi R merupakan relasi simetri.

Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen.

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (2)

Contoh :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika a – b ∈ Z.

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

Jawab :

Untuk setiap a ∈ Rill maka a – a = 0 ∈ bilangan bulat, oleh karena itu R bersifat refleksif.

Misalkan a R b maka (a – b) ∈ Z, jelas bahwa (b – a) ∈ Z. Dengan demikian R bersifat simetri.

Jika a R b dan b R c artinya (a – b), (b – c) ∈ Z maka (a – c) = (a – b) + (b – c) juga merupakan bilangan bulat.

Oleh karena itu a R c. Jadi R bersifat transitif.

Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (3)

(Modul Kongruen)
Misalkan m adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1.
Tunjukan bahwa Relasi
R = {(a,b) | a ≡ b (mod m)} merupakan relasi ekivalen pada himpunan bilangan bulat.
Jawab :
Ingat bahwa a ≡ b (mod m) jika dan hanya jika m membagi a – b .
Karena a – a = 0 dapat dibagi oleh m, yaitu 0 = 0 m.
Oleh karena itu, a ≡ a (mod m) , sehingga R bersifat refleksif.
a – b dapat dibagi oleh m sehingga a – b = km, untuk suatu k ∈ Z Ini mengakibatkan b – a = –km. Jadi relasi tersebut **simetri**

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (3) cont…

Misalkan a ≡ b (mod m) dan b ≡ c (mod m),
sehingga a – b dan b – c dapat dibagi oleh m, atau
a – b = km dan b – c = lm untuk suatu k, l ∈ Z
Dengan menjumlahkan keduanya :
a – c = (a – b) + (b – c) = (k + l) m, maka a ≡ c (mod m),
Ini menunjukan bahwa relasi tersebut transitif.
Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen.

Misalkan R adalah relasi ekivalen pada himpunan A. Semua unsur himpunan yang relasi dengan suatu unsure a di A dinamakan kelas ekivalen dari a.
Kelas ekivalen dari a terhadap relasi R dinotasikan oleh $[a]_R$. Jika hanya ada satu relasi pada himpuanan tersebut, notainya adalah [a]

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (4)

Contoh

Tentukan kelas ekivalen 0, 1, –2, dan –3 pada relasi modul kongruen 4!

Jawab :

[0] = { . . . , – 12, – 8, – 4, 0, 4, 8, 12, . . . }
[1] = { . . . , – 11, – 7, – 3, 1, 5, 9, . . . }
[–2] = { . . . , – 10, – 6, – 2, 2, 6, 10, . . . }
[–3] = { . . . , – 11, – 7, – 3, 1, 5, 9, . . . }

Sebuah relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi terurut parsial** jika relasi tersebut bersifat refleksif, antisimetri dan transitif. Sebuah himpunan S yang dilengkapi dengan sebuah relasi R yang terurut parsial, himpunan tersebut dinamakan himpunan terurut parsial (partially ordering set – poset), Notasi : (S, R).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (5)

Contoh :

Tunjukan bahwa relasi '$\leq$' merupakan relasi terurut pada Z.

Jawab :

Karena $a \leq a$ untuk setiap $a \in Z$, maka relasi '$\leq$' bersifat refleksi.
Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = a$. Jadi relasi '$\leq$' bersifat antisimetri.
Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ berarti $a \leq c$. Jadi relasi '$\leq$' bersifat transitif.
Dengan demikian relasi '$\leq$' merupakan relasi terurut pada Z.

Setiap unsur dalam poset (S, ρ) dikatakan comparable (dapat dibandingkan) jika $a \rho b$ atau $b \rho a$ untuk setiap $a, b \in S$. Selanjutnya, Jika (S, ρ) merupakan sebuah poset dan setiap dua unsur dalam S adalah comparable, maka S dinamakan Himpunan terurut total (*Totally Ordered Set* -Toset) atau *Chain*, sedangkan ρ dinamakan urutan total.

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (6)

Contoh :

1. (N, ≤) merupakan toset.
2. (N, |) bukan toset karena tak comparable.

Jika (S, ρ) adalah sebuah toset dan setiap subset tak kosong dari S paling sedikit memiliki satu unsur, maka (S, ρ) dinamakan Well-ordered Set (himpunan terurut dengan baik).

Setiap himpunan terurut parsial dapat disajikan dalam bentuk diagram Hasse. Langkah-langkah dalam menggambar digram Hasse dari suatu poset adalah :

- Gambarkan relasi urutan dalam bentuk directed graph.
- Hapus semua loop (karena refleksif)
- Hapus semua lintasan transitif

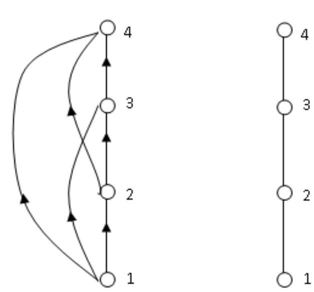
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Relasi Ekivalen dan Relasi Terturut (6)

Contoh :

Gambarkan diagram Hasse dari poset ({1,2,3,4}, ρ = {(a, b) | a < b}}

Jawab:



Fungsi

Misalkan A dan B merupakan himpunan. Suatu fungsi f dari A ke B merupakan sebuah aturan yang mengkaitkan satu (tepat satu) unsur di B untuk setiap unsur di A. Kita dapat menuliskan f(a) = b, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A. Ini berarti bahwa jika f(a) = b dan f(a) = c maka b = c.

Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kita dapat menuliskan dalam bentuk :

$f : A \rightarrow B$

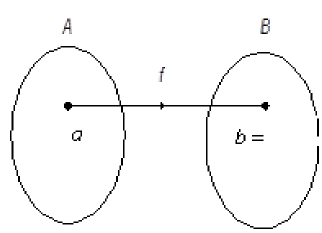
artinya f memetakan himpunan A ke himpunan B.

A dinamakan daerah asal (domain) dari f dan B dinamakan daerah hasil (codomain) dari f. Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Fungsi cont…

Misalkan f(a) = b, maka b dinamakan bayangan (image) dari a dan a dinamakan pra-bayangan (pre-image) dari b. Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (range) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin proper subset) dari B.



Fungsi example

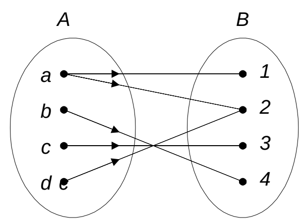
Contoh 1:

Misalkan $f : R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$.

Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan Riil, sedangkan jelajah dari f merupakan himpunan bilangan Riil tidak-negatif.

Contoh 2 :

Dibawah ini contoh suatu relasi yang bukan merupakan fungsi :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Penyajian Fungsi

1. Himpunan pasangan terurut.
   Misalkan f adalah fungsi kuadrat pada {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :
   $f = \{(2, 4), (3, 9)\}$
2. Formula pengisian nilai (assignment).
   Contoh :
   $f(x) = x^2 + 10$,
   $f(x) = 5x$,
3. Kata-kata
   Contoh :
   "f adalah fungsi yang memetakan jumlah bilangan bulat menjadi kuadratnya"

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Penyajian Fungsi cont...

4. Kode program (source code)

   Contoh:

   Fungsi menghitung |x| (harga mutlak dari).

```
function abs(x:integer):integer;
      begin
        if  x   >  0  then
            abs := x
      else
            abs :=  –x;
         end;
```

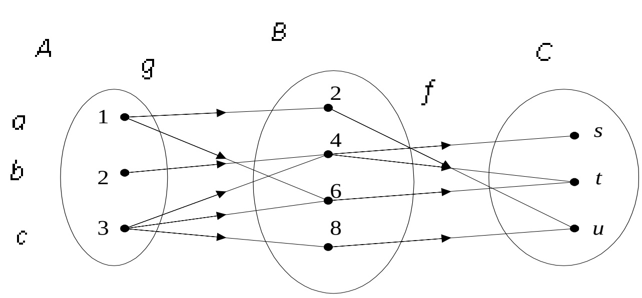
Misalkan g merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f merupakan fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Fungsi komposisi f dan g, dinotasikan dengan f o g, merupakan fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$(f \circ g)(a) = f(g(a))$, untuk suatu a di A.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Penyajian Fungsi cont...

Perhatikan ilustrasi fungsi komposisi dibawah ini



Penyajian Fungsi cont...

Contoh :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : Z \rightarrow Z$, diberikan fungsi $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x2$.

Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Jawab :

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan satu-ke-satu (one-to-one) atau injektif (injective) jika tidak ada dua unsur himpunan A yang memiliki bayangan sama pada himpunan B.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Penyajian Fungsi cont...

Contoh :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : R \rightarrow R$.

Tentukan apakah $f(x)=x^2$ dan $g(x)=x+1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Jawab :

a. $f(x) = x^2$ bukan fungsi satu-ke-satu,
karena $f(2) = f(-2) = 4$ padahal $-2 \neq 2$.

b. $g(x)=x+1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a+1 \neq b+1$.

Misalnya untuk $x = 1$, $g(1)=2$. Sementara itu, untuk $x=2$, $g(2) = 3$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan pada (onto) atau surjektif (surjective) jika setiap unsur pada himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih unsur himpunan A. Dengan kata lain seluruh unsur B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B

Penyajian Fungsi cont…

Contoh :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : R \rightarrow R$.

Tentukan apakah $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 1$ merupakan fungsi pada !

Jawab :

a. $f(x) = x^2$ bukan fungsi pada,

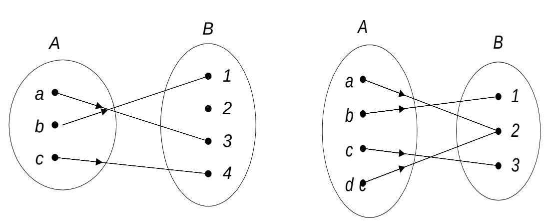
karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f,

yaitu bilangan bulat negatif.

b. $g(x) = x + 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan Riil y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x + 1$.

Penyajian Fungsi cont…

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan berkoresponden satu-ke-satu atau bijeksi (bijection) jika fungsi tersebut satu-ke-satu dan juga pada. Agar mendapatkan pengertian yang lebih baik, perhatikan ilustrasi berikut :



Fungsi satu-ke-satu, bukan pada

Fungsi pada, bukan satu-ke-satu

Penyajian Fungsi cont…

Jika f merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B yang berkoresponden satu-ke-satu maka kita senantiasa dapat menemukan balikan (invers) dari fungsi f. Balikan fungsi dinotasikan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu disebut juga fungsi yang invertible (dapat dibalik), sehingga kita dapat mendefinisikan suatu fungsi balikannya. Jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu maka fungsi tersebut dikatakan tidak invertible, karena fungsi balikannya tidak ada.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Penyajian Fungsi cont…

Contoh :

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x + 1$.

Jawab :

Fungsi $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi invers fungsi tersebut ada.

Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x + 1$, maka $x = y – 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f\text{-}1(y) = y – 1$.

Contoh :

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2$.

Jawab :

Dari contoh sebelumnya, $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2$ adalah fungsi yang tidak invertible.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Fungsi Rekursif

Fungsi merupakan bentuk khusus dari suatu relasi. Sebuah fungsi dinamakan fungsi rekursif, jika fungsi tersebut mengacu pada fungsi itu sendiri. Komponen penyusun fungsi rekursif, meliputi :

- Nilai Basis
  Komponen ini merupakan nilai awal dari fungsi tersebut.
- Rekurens
  Komponen ini mendefinisikan argumen fungsi terkait dengan dirinya sendiri.

53 8/29/2014

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Fungsi Rekursif

Contoh fungsi rekursif yang sederhana adalah fungsi faktorial. Perhatikan kembali rumus faktorial :

a. Nilai basis
   n! = 1, untuk n = 0

b. Rekurens
   n! = n x (n-1) !, untuk n ≥ 1.

Dengan demikian, saat kita akan mentukan nilai fungsi 4!, maka :
4 ! = 4 . 3 ! = 4 . 3 . 2! = 4 . 3 . 2 . 1! = 4 . 3 . 2. 1 . 0! = 24
Dalam suatu algoritma, biasanya kemunculan fungsi rekursif terjadi pada suatu looping. Misalkan diketahui nilai fungsi saat t = 0 adalah a, selanjutnya fungsi f(k) = 2 . f(k – 1) + 3. Jadi secara sederhana, yang menjadi peubah pada fungsi rekursif adalah fungsi pada iterasi sebelumnya. Inilah yang menyebabkan kita harus mempunyai suatu nilai awal fungsi tersebut.

54 8/29/2014

THANK YOU

8/29/2014