

# Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

## Silabus :

Bab I Matriks dan Operasinya

Bab II Determinan Matriks

Bab III Sistem Persamaan Linear

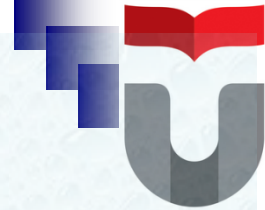
Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang

Bab V Ruang Vektor

Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam

Bab VII Transformasi Linear

Bab VIII Ruang Eigen



## Beberapa Aplikasi Ruang Eigen

- Uji Kestabilan dalam sistem dinamik
- Optimasi dengan SVD pada pengolahan Citra
- Sistem Transmisi
- dan lain-lain.

### Definisi :

Misalkan  $A_{n \times n}$  matriks matriks bujur sangkar  
 $\bar{v}$  adalah vektor tak nol di  $\mathbb{R}^n$  dan  $\lambda$  adalah skalar Riil  
sehingga memenuhi :

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

maka  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $A$ ,  
sedangkan  $\bar{v}$  dinamakan vektor eigen dari  $A$

**Contoh :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Nilai eigen**

**Vektor eigen**

# Perhatikan !!!

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0}$$

$$A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = \bar{0}$$

$$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$$

**Ingat....**

$\bar{v}$  merupakan vektor tak nol

**Ini Berarti**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

**Persamaan Karakteristik**

**Contoh :**

**Tentukan nilai eigen dari matriks**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Persamaan Karakteristik  $\det(A - \lambda I) = 0$**

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2

$$(1 - \lambda) \left( (1 - \lambda)(-\lambda) - 2 \right) = 0$$

$$(1 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$(1 - \lambda) (\lambda - 2) (\lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$$\lambda = -1, \lambda = 1, \text{ dan } \lambda = 2.$$

### **Contoh :**

Tentukan basis ruang eigen dari :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Nilai eigen dari A diperoleh saat  $\det (A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2) \{ (\lambda - 2)^2 - 1 \} + (-\lambda + 1) - (1 + (\lambda - 2)) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2) \{ \lambda^2 - 4\lambda + 3 \} - (\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2) \{ (\lambda - 3)(\lambda - 1) \} - 2(\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1) \{ (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2 \} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1) (\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4) = 0$$

Nilai Eigen dari matriks tersebut adalah 1 dan 4.

- **Untuk  $\lambda = 1$**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

dimana  $s, t$  adalah parameter





Jadi Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda=1$  adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Ingat bahwa...**

**Vektor eigen merupakan kelipatan dari unsur basis tersebut**

- Untuk  $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

maka  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda=4$  adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Diagonalisasi

Definisi : Suatu matriks persegi  $A_{n \times n}$  dikatakan

**dapat didiagonalkan (diagonalizable)**

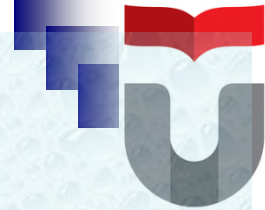
jika terdapat matriks  $P$  yang mempunyai invers

(Jadi kolom-kolomnya harus bebas linier)

sehingga  $P^{-1}AP$  merupakan matriks diagonal.

Matriks  $P$  dinamakan matriks yang mendiagonalkan (pendiagonal) dari  $A$ .

Vektor-vektor kolom dari matriks  $P$  adalah vektor-vektor eigen dari  $A$ .



## Contoh :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

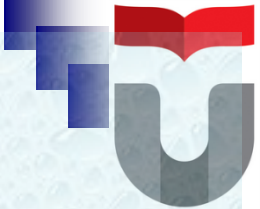
## Jawab :

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah :

$$|\lambda I - A| = 0$$

atau

$$\det \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

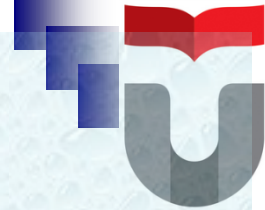

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1) & -1 \\ 0 & -1 & (\lambda - 1) \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor :  
Pilih Baris I

$$\begin{aligned} \det \{ \lambda I - A \} &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda)(\lambda - 2) + 0 + 0 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 ; \lambda = 1 ; \lambda = 2$$



Untuk  $\lambda = 0$

Dengan OBE maka

$$(\lambda I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad \text{dimana } t \text{ adalah parameter tak nol}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 0$  adalah

$$\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Untuk**  $\lambda = 1$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t, \text{ dimana } t \text{ adalah parameter tak nol}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 1$  adalah

$$\bar{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Untuk**  $\lambda = 2$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \text{ dimana } t \text{ adalah parameter tak nol}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 2$  adalah

$$\bar{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Perhatikan

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 = \bar{0}$$

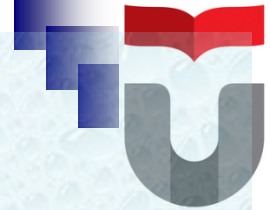
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi  $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3\}$

merupakan himpunan yang bebas linear



Jadi, Matriks yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal yang dihasilkan adalah :  $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

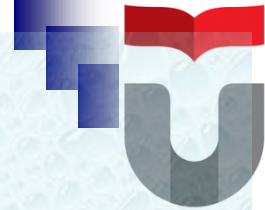
Hal yang perlu diperhatikan, matriks  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Juga mendiagonalkan A.

Tapi matriks diagonal yang terbentuk adalah :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B_{n \times n}$  dikatakan matriks ortogonal **jika**  $B^{-1} = B^t$

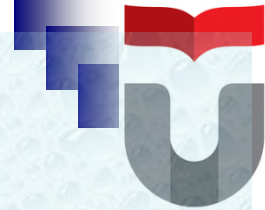


Pernyataan berikut adalah ekuivalen :

- $B_{n \times n}$  adalah matriks ortogonal.
- Vektor-vektor baris dari  $B$  membentuk himpunan ortonormal di  $\mathbb{R}^n$  dalam RHD Euclides.
- Vektor-vektor kolom dari  $B$  membentuk himpunan ortonormal di  $\mathbb{R}^n$  dalam RHD Euclides.

Misalkan  $P$  merupakan matriks ortogonal maka berlaku :

- $P^t P = I$
- $\|Px\| = \|x\|$ , untuk setiap  $x$  di  $\mathbb{R}^n$



## Contoh :

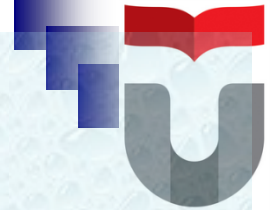
Berikut adalah contoh matriks ortogonal :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa setiap vektor baris/kolom merupakan vektor satuan

Dan HkD antar vektor tersebut adalah nol



Perhatikan bahwa :

$$A^t A = I_{2 \times 2} \quad \text{dan} \quad B^t B = I_{3 \times 3}$$

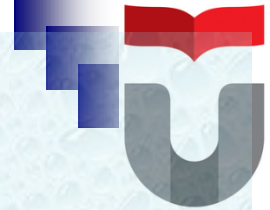
Sementara itu,

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{196}{2} + \frac{4}{2}}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|$$



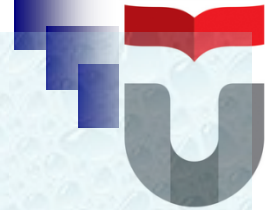
## Definisi :

Suatu matriks  $A_{n \times n}$  dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal

jika terdapat **matriks ortogonal**  $P$

sedemikian hingga

**$P^{-1}AP$  ( $=P^tAP$ )** merupakan matriks diagonal.



Perhatikan bahwa :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{atau} \quad A = PDP^{-1}$$

Misalkan  $P$  merupakan matriks ortogonal, maka

$$A = PDP^t$$

Sehingga diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} A^t &= (PDP^t)^t \\ &= (P^t)^t D^t P^t \\ &= PDP^t \\ &= A \end{aligned}$$

$A$  dapat didiagonalkan secara ortogonal

*jika dan hanya jika*  $A$  matriks simetri

Misal  $A_{n \times n}$ , cara menentukan matriks ortogonal  $P$  yang mendiagonalkan  $A$  :

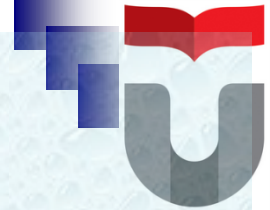
- Tentukan nilai eigen
- Tentukan basis ruang eigen untuk setiap nilai eigen yang diperoleh
- Ubah **setiap** basis pada (b) menjadi basis ruang eigen yang ortonormal.
- Bentuk matriks  $P$  dimana vektor-vektor kolomnya berupa basis ruang eigen yang ortonormal.

Contoh :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan secara ortogonal matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





## Jawab :

Basis ruang eigen :

- Untuk  $\lambda = 0$  adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

- Untuk  $\lambda = 1$  adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Untuk  $\lambda = 2$  adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Dengan demikian, secara berurutan basis ruang eigen yang ortonormal matriks tersebut

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ dan } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Sehingga, matriks ortogonal yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

# Ingat Kembali Pers. Diferensial

$$\frac{dy(t)}{dt} = a y(t) \implies y(t) = ce^{at}$$

Misalkan sekumpulan PD orde 1 ditulis :

$$\begin{aligned} \frac{dr_1(t)}{dt} &= 2r_1(t) \\ \frac{dr_2(t)}{dt} &= -3r_2(t) \\ \frac{dr_3(t)}{dt} &= r_3(t) \end{aligned} \implies \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Solusi sistem PD tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan diferensial **tidak selalu** memberikan matriks koefisien yang berbentuk matriks diagonal.

Bentuk Umum SPD orde 1 :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah menyelesaikan SPD orde 1 linear :

- Menentukan matriks  $P$  yang mendiagonalkan  $A$ .
- Tulis SPD *dummy* dalam bentuk  $U' = DU$  dimana  $D = P^{-1}AP$
- Tentukan solusi SPD *dummy*  $U' = DU$
- Solusi SPD adalah  $X = PU$

## Contoh 6 :

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

**Jawab :**

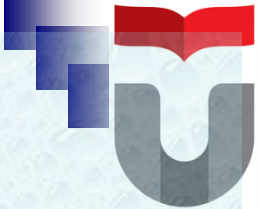
Tulis SPD dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dengan PK

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen dari matriks koefisien,  $\lambda = 2$  dan  $\lambda = 3$

- 
- BRE yang bersesuaian dengan  $\lambda = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
  - BRE yang bersesuaian dengan  $\lambda = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Sehingga diperoleh  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Karena  $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

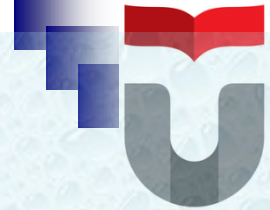
maka SPD dummy berbentuk :

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Solusi SPD dummy adalah

$$u_1 = c_1 e^{3t} \quad \text{dan} \quad u_2 = c_2 e^{2t}$$

## Solusi dari SPD

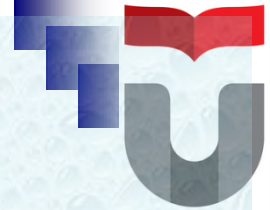


$$X = PU \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

atau

$$x_1 = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

$$x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$



## Contoh 8.9 :

Tentukan solusi dari masalah nilai awal

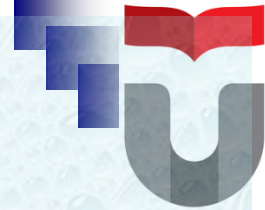
$$\frac{dp}{dt} = 2p(t) + q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = p(t) + 2q(t)$$

dengan kondisi awal

$$p(0) = 1 \text{ dan } q(0) = 3$$





**Jawab :**

Kita peroleh  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Persamaan Karakteristiknya adalah

$$\det \{\lambda.I - A\} = 0 \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

diperoleh  $\lambda = 1$  ;  $\lambda = 3$

Untuk  $\lambda = 1$

$$(\lambda I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 1$  adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \text{ dimana } t \text{ merupakan parameter.}$$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 1$  adalah

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk  $\lambda = 3$

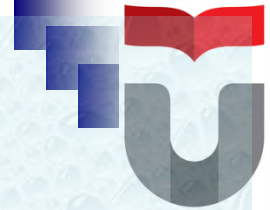
$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = t \end{array}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 3$  adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad \text{dimana } t \text{ merupakan parameter}$$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 3$  adalah

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Sehingga Solusi Umum SPD  $U' = D U$  adalah

$$U = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian solusi SPD kita adalah :

$$X = P U$$

atau

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

sehingga

$$p = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

$$q = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

Untuk  $t = 0 \Rightarrow p(0) = 1$  dan  $q(0) = 3$  sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

Dengan Eliminasi didapat  $C_1 = 1$  ;  $C_2 = 2$

Jadi solusi masalah nilai awal tersebut adalah

$$p(t) = 2e^{3t} - e^t$$

$$q(t) = 2e^{3t} + e^t$$

## Latihan Bab 8

1. Tentukan basis ruang eigen dari  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. Diketahui :  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Apakah B matriks dapat didiagonalkan? Jelaskan!

3. Suatu Matriks  $A_{2 \times 2}$  memiliki basis ruang eigen :
  - $\lambda = -3 \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
  - $\lambda = 1 \implies \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Tentukan matriks A !

4. Tentukan solusi dari masalah nilai awal :

$$\frac{dp}{dt} = p(t) + 3q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = 4p(t) + 5q(t)$$

dengan kondisi awal

$$p(0) = 2 \quad \text{dan} \quad q'(0) = 1$$

