Aljabar Linear Elementer
MA1223
3 SKS

Silabus :

Determinan Matriks

Sub Pokok Bahasan

– Permutasi dan Determinan Matriks
– Determinan dengan OBE
– Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Beberapa Aplikasi Determinan

- Solusi SPL
- Optimasi
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Permutasi dan Definisi Determinan Matriks

Permutasi → susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan

Contoh :

Permutasi dari {1, 2, 3} adalah

(1,2,3), (1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)

Invers dalam Permutasi

→Jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutan permutasi

Permutasi Genap ← Jumlah invers adalah bil. genap
Permutasi Ganjil ← Jumlah invers adalah bil. ganjil

Contoh :

Jumlah invers pada permutasi dari {1, 2, 3}

(1,2,3) → 0 + 0 = 0 → genap

(1,3,2) → 0 + 1 = 1 → ganjil

(2,1,3) → 1 + 0 = 1 → ganjil

(2,3,1) → 1 + 1 = 2 → genap

(3,1,2) → 2 + 0 = 2 → genap

(3,2,1) → 2 + 1 = 3 → ganjil

Bilangan yang lebih dari 3: 2 dan 1→2, yang lebih dari 2: 1→1

Definisi Determinan Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hasil kali elementer A → hasilkali *n* buah unsur A tanpa ada pengambilan unsur dari baris/kolom yang sama.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ada 6 (3!) hasil kali elementer dari matriks A, yaitu:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33},\ \ a_{11}\, a_{23}\, a_{32},\ \ a_{12}\, a_{21}\, a_{33},$$
$$a_{12}\, a_{23}\, a_{31},\ \ a_{13}\, a_{21}\, a_{32},\ \ a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

Perhatikan angka kedua saja, misal: $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ → (2,3,1)

Hasil kali elementer bertanda

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$$
$$-\,a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$
$$-\,a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$
$$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$$
$$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$-\,a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

Perhatikan…
Tanda (+/-) muncul sesuai hasil klasifikasi permutasi indeks kolom, yaitu : jika genap → + (positif)
jika ganjil → - (negatif)

Jadi, Misalkan A_{nxn} maka determinan dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda matriks tersebut.

Notasi : Det(A) atau |A|

Contoh :

Tentukan Determinan matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Jawab :

Menurut definisi :

$$Det(A_{3x3}) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

atau

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array} \right.$$

Contoh :

Tentukan determinan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\det(B) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right.$$

$$= \boxed{(3)(1)(1)} + \boxed{(2)(0)(-2)} + \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(3)(0)(-2)} - \boxed{(2)(1)(1)}$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

Menghitung Determinan dengan OBE

Perhatikan :

a. $$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

b. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$

c. $$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 45$$

Dengan mudah…
Karena hasil kali elementer bertanda selain unsur diagonal adalah nol

Det(A) =
Hasilkali unsur diagonal?

Hitung Det. Matriks Bukan Segitiga???

Perlu OBE untuk menentukan determinan suatu matriks yang bukan segitiga.

Caranya :

Matriks bujur sangkar ~ OBE ~ matriks segitiga

Berikut ini adalah **pengaruh OBE** pada nilai determinan suatu matriks, yaitu :

1. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan satu kali pertukaran baris maka Det (B) = - Det (A)

   Contoh : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3$

   maka

   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 = -|A|$$

2. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan mengalikan satu baris dengan konstanta *k*, maka

Det (B) = *k*Det (A)

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 3$

dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

maka

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2|A| = 6$$

3. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tak nol k lalu dijumlahkan pada baris lain maka Det (B) = Det (A)

Contoh 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -12$$

Perhatikan

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}$$

OBE yang dilakukan pada matriks tersebut adalah $-2b_1 + b_2$

$$= -12$$

Contoh 3 :

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{pertukaran baris ke-1 dan ke-2}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad -2b_1 + b_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{Pertukaran baris ke - 2 dan ke - 3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3b_2 + b_3$$

$= 4$ (hasil perkalian semua unsur diagonalnya)

Determinan dengan ekspansi kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke_i dan kolom ke-j matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- C_{ij} Matrik dinamakan **kofaktor - *ij*** yaitu $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$C_{12} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \, .2$$

$$= -2$$

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor :

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-*i*

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-*j*

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{jn}$$

Contoh 6 :

Hitunglah Det(A) dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j}$$

$$= a_{31}\ C_{31} + a_{32}\ C_{32} + \ldots + a_{3n}\ C_{3n}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \ 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang **kolom ke-3**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} c_{i3}$$

$$= a_{13}\ C_{13} + a_{23}\ C_{23} + \ldots + a_{n3}\ C_{n3}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 0 - 2 + 6$

$= 4$

Misalkan $A_{n \times n}$ dan C_{ij} adalah kofaktor *aij*, maka

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n2} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

dinamakan **matriks kofaktor** A.

Transpos dari matriks ini dinamakan **adjoin** *A*, notasi *adj*(A).

$$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Misalkan A punya invers
maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

A mempunyai invers *jika dan hanya jika* det (A) ≠ 0.

Beberapa sifat determinan matriks adalah :

1. Jika A adalah sembarang matriks kuadrat, maka
   det (A) = *det* (A^t)
2. Jika A dan B merupakan matriks kuadrat berukuran sama, maka :
   det (A) *det* (B) = *det* (AB)
3. Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Contoh :

Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks adjoin A

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = 2,\ c_{22} = 1,\ c_{23} = -2,\ c_{31} = 1,\ c_{32} = 1,\ \text{dan}\ \ c_{33} = -1.$$

Sehingga matriks kofaktor dari A :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka matriks Adjoin dari A adalah :

$$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Latihan Bab 2

1. Tentukan determinan matriks dengan OBE dan ekspansi kofaktor

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tunjukan bahwa : *det* (A) *det* (B) = *det* (AB)

3. Diketahui :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$$

Tentukan k jika *det* (D) = 29

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jika B = A^{-1} dan A^t merupakan transpos dari A.
Tentukan nilai

$$x = \frac{\det\left(2A^2\right) - \det(5B)}{\det\left(A^t B\right)}$$