



Aljabar Linear Elementer

MUG1E3

3 SKS

04/02/2014 9:47

1



Jadwal Kuliah

Hari I	Selasa, jam 10.30
Hari II	Kamis, jam 10.30

Sistem Penilaian

UTS	40%
UAS	40%
Quis	20%

04/02/2014 9:47

MA-1223 Aljabar Linear

2



Silabus :

- Bab I Matriks dan Operasinya
- Bab II Determinan Matriks
- Bab III Sistem Persamaan Linear
- Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang
- Bab V Ruang Vektor
- Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam
- Bab VII Transformasi Linear
- Bab VIII Ruang Eigen

04/02/2014 9:47

3



REFERENSI :

- Adiwijaya, 2014, *Aplikasi Matriks dan Ruang Vektor*, Graha Ilmu
- Anton H., Rorres, C., 1995, *Elementary Linear Algebra : Applications Version*, 6th edition, John Willey and Sons, New York
- Leon, S. J., 2001, *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, terjemahan Penerbit Erlangga, Jakarta

04/02/2014 9:47

4

1. Matriks dan Operasinya

Sub Pokok Bahasan

- Matriks dan Jenisnya
- Operasi Matriks
- Operasi Baris Elementer
- Matriks Invers (Balikan)

Beberapa Aplikasi Matriks

- Representasi image (citra)
- *Chanel/Frequency assignment*
- *Operation Research*
- dan lain-lain.

04/02/2014 9:47

5

1. Matriks dan Jenisnya

Notasi Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

← Baris pertama

← Unsur / entri / elemen ke- mn
(baris m kolom n)

↑
Kolom kedua

Matriks A berukuran (Ordo) $m \times n$

04/02/2014 9:47

6

Misalkan A dan B adalah matriks berukuran sama
 A dan B dikatakan sama (notasi $A = B$)

jika

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{b}_{ij} \text{ untuk setiap } i \text{ dan } j$$

Jenis-jenis Matriks

- **Matriks bujur sangkar (persegi)**

→ Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya adalah sama ($n \times n$)

Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Unsur diagonal

04/02/2014 9:47

MA-1223 Aljabar Linear

7

Matriks segi tiga

Ada dua jenis, yaitu matriks segitiga atas dan bawah.

- **Matriks segi tiga atas**

→ Matriks yang semua unsur dibawah unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol.

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Matriks segi tiga bawah**

→ Matriks yang semua unsur diatas unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

04/02/2014 9:47

8

- **Matriks Diagonal**

→ Matriks bujur sangkar dimana setiap unsur yang bukan merupakan unsur diagonal adalah nol.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriks satuan (Identitas)**

→ Matriks diagonal dimana setiap unsur diagonalnya adalah satu.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

04/02/2014 9:47

9

- **Transpos Matriks**

Matriks transpos diperoleh dengan menukar baris matriks menjadi kolom, dan sebaliknya.

Notasi A^t (hasil transpos matriks A)

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ maka } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika matriks $A = A^t$ maka matriks A dinamakan matriks Simetri.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

04/02/2014 9:47

10

2. Operasi Matriks

Beberapa Operasi Matriks yang perlu diketahui :

1. Penjumlahan Matriks
2. Perkalian Matriks
 - Perkalian skalar dengan matriks
 - Perkalian matriks dengan matriks
3. Operasi Baris Elementer (OBE)

04/02/2014 9:47

11

• Penjumlahan Matriks

Syarat : Matriks yang dijumlahkan berordo sama

Contoh

$$\mathbf{a.} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

04/02/2014 9:47

12

Perkalian Matriks

• Perkalian Skalar dengan Matriks

Contoh :

$$k \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{bmatrix}$$

• Perkalian Matriks dengan Matriks

Misalkan A berordo $p \times q$ dan B berordo $m \times n$

Syarat : $A \times B \rightarrow$ haruslah $q = m$

hasil perkalian AB berordo $p \times n$

$B \times A \rightarrow$ haruslah $n = p$

hasil perkalian BA berordo $m \times q$

Contoh :

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

04/02/2014 9:47

13

Maka hasil kali A dan B adalah :

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} ap+bq+cr & as+bt+cu \\ dp+eq+fr & ds+et+fu \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dan α, β merupakan unsur bilangan Riil,

Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut :

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta) (A) = \alpha A + \beta A$

04/02/2014 9:47

14

Contoh :

Diketahui matriks :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan

- a. $A A^t$
- b. $A^t A$

04/02/2014 9:47

15

Jawab :

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sedangkan

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

04/02/2014 9:47

16

• Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh : OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama (b_1) ditukar dengan baris ke-2 (b_2)

04/02/2014 9:47

17

OBE ke-2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} b_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian Baris pertama (b_1) dengan bilangan $\frac{1}{4}$

OBE ke-3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} -2b_1 + b_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Perkalian (-2) dengan b_1 lalu tambahkan pada baris ke-3 (b_3)

04/02/2014 9:47

18

- Beberapa definisi yang perlu diketahui :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol.
- Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing.
- Bilangan 1 (pada baris baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
- Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

04/02/2014 9:47

19

Sifat matriks hasil OBE :

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
2. Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
3. Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Matriks dinamakan esilon baris jika
dipenuhi sifat 1, 2, dan 3 (Proses Eliminasi *Gauss*)

Matriks dinamakan esilon baris tereduksi jika
dipenuhi semua sifat (Proses Eliminasi *Gauss-Jordan*)

04/02/2014 9:47

20

Contoh :

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\begin{aligned} A &\sim -2b_1 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &\sim b_2 \leftrightarrow b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

04/02/2014 9:47

MA-1223 Aljabar Linear

21

$$\begin{aligned} A &\sim -2b_2 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim -b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim -b_3 + b_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim b_2 + b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

04/02/2014 9:47

MA-1223 Aljabar Linear

22

Perhatikan hasil OBE tadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Setiap baris mempunyai satu utama.

Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom

(kolom 4 tidak mempunyai satu utama)

04/02/2014 9:47

23

Invers Matriks

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar.

B dinamakan invers dari A jika dipenuhi

$$A B = I \text{ atau } B A = I$$

Sebaliknya, A juga dinamakan invers dari B.

Cara menentukan Invers suatu matriks A adalah

$$(A|I) \xrightarrow{\text{OBE}} (I|A^{-1})$$

Jika OBE dari A tidak menghasilkan matriks identitas

Maka A dikatakan Tidak Punya Invers

04/02/2014 9:47

24

Contoh :

Tentukan matriks invers (jika ada) dari :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} b_1 \leftrightarrow b_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} -3b_1 + b_2 \\ 2b_1 + b_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

04/02/2014 9:47

25

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) -b_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$-b_3 + b_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$-b_2 + b_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Jadi Invers Matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

04/02/2014 9:47

26

- **Perhatikan bahwa :**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

04/02/2014 9:47

27

Berikut ini adalah sifat-sifat matriks invers :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- Jika A, B dapat dibalik atau memiliki invers maka $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- Misal $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ maka $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
- Akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

04/02/2014 9:47

28

Latihan

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan (untuk no 1 – 5) matriks hasil operasi berikut ini :

1. AB
2. $3CA$
3. $(AB)C$
4. $(4B)C + 2C$

04/02/2014 9:47

29

Untuk Soal no. 5 – 7, Diketahui :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan : $D + E2$ (dimana $E2 = EE$)
6. Tentukan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari A , B , C , D , dan E
7. Tentukan matriks invers dari D dan E (jika ada)

04/02/2014 9:47

30