Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Kode MK/ Matematika Diskrit

TEORI GRAF

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Cakupan

- Himpunan,
- Relasi dan fungsi
- Kombinatorial
- **Teori graf**
- Pohon (*Tree*) dan pewarnaan graf

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

TEORI GRAF

Tujuan

- Mahasiswa memahami konsep dan terminologi graf
- Mahasiswa memodelkan masalah dalam bentuk graf
- Mahasiswa dapat menyelesaikan berbagai persoalan yang terkait dengan teori graf

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Definisi

- Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut simpul (vertices, vertex) dan himpunan sisi (edges) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. terdiri dari dari Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Notasi sebuah graf adalah G = (V, E), dimana :

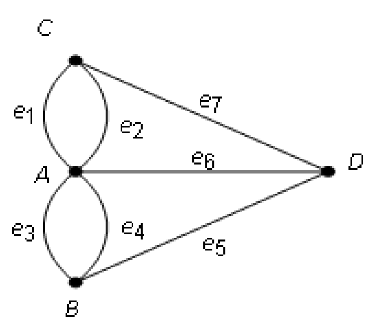
Definisi

- V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul (vertices), misalkan V = { v_1 , v_2 , … , v_n }
- E merupakan himpunan sisi – sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul, misalkan E = {e_1 , e_2 , … , e_n }

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh :

- Graf dari masalah jembatan Konigsberg dapat disajikan sebagai berikut :



Misalkan graf tersebut adalah G(V, E) dengan
V = { A, B, C, D }
E = { (A, C), (A, C), (A, B), (A, B), (B, D), (A, D), (C, D)}
= { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7}

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

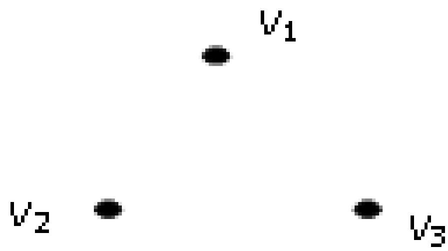
- Pada graf tersebut sisi e_1 = (A, C) dan sisi e_2 = (A, C) dinamakan sisi-ganda (multiple edges atau paralel edges) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul A dan simpul C. Begitu pun dengan sisi e_3 dan sisi e_4. Sementara itu, pada graf diatas, tidak terdapat gelang (loop), yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

- Dari definisi graf, himpunan sisi (E) memungkinkan berupa himpunan kosong. Jika graf tersebut mempunyai himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong maka graf tersebut dinamakan graf kosong (null graph atau empty graph).

Contoh :

- Graf kosong dengan 3 simpul (graf N3)



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

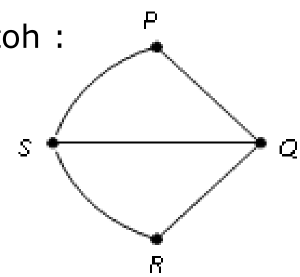
- Dengan memperhatikan kondisi sisinya, suatu graf dapat dikategorikan sebagai graf tidak berarah dan graf berarah. Graf tidak berarah, seperti telah dijelaskan pada contoh graf untuk jembatan Konigsberg. Sementara itu, graf berarah (directed graph, digraph) merupakan graf yang mempunyai sisi yang berarah, artinya satu buah simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut merupakan simpul awal (initial vertex) dan simpul yang lain dikatakan sebagai simpul akhir (terminal vertex).

Beberapa jenis Graf

- Graf sederhana (*simple graph*).

Graf sederhana merupakan graf tak berarah yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda

Contoh :



Selanjutnya, pernyataan suatu graf pada slide ini merepresentasikan bahwa graf tersebut adalah graf sederhana. Kecuali apabila ada penambahan lain, misalkan graf semu atau graf berarah, dan lain-lain.

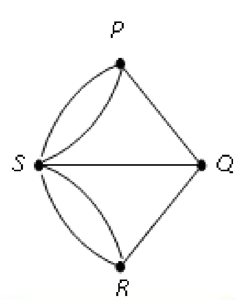
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Jenis graf (cont)

- Graf Ganda (*multigraph*).

Graf ganda merupakan graf tak berarah yang tidak mengandung gelang (*loop*).

Contoh :



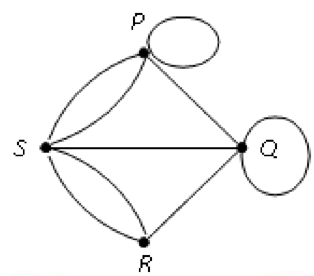
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Jenis graf (cont)

- Graf semu (*Pseudo graph*)

Graf semu merupakan graf yang boleh mengandung gelang (loop).

Contoh :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

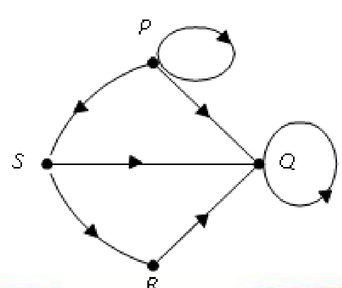
Beberapa Jenis graf (cont)

- Graf berarah (directed graph atau digraph).

Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya mempunyai arah dan tidak mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul (tak mempunyai sisi ganda)

Contoh :

a. Graf Bearah



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

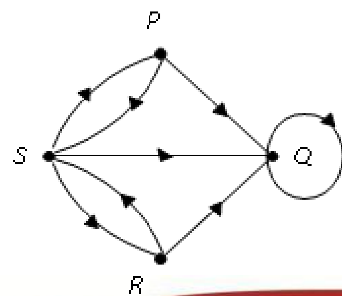
Beberapa Jenis graf (cont)

- Graf berarah (directed graph atau digraph).

Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya mempunyai arah dan tidak mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul (tak mempunyai sisi ganda)

Contoh :

b. Graf ganda bearah



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

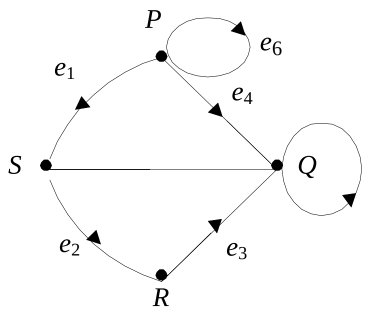
Perbandingan jenis-jenis Graf

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Gelang (loop) dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh

- Graf berikut merupakan graf berarah :



Terlihat bahwa e_1 = (P, S), e_3 = (R, Q), dan e_5 = (Q, Q)

Simpul P merupakan simpul awal bagi sisi e_1 dan simpul S merupakan simpul akhir bagi sisi e_1

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf

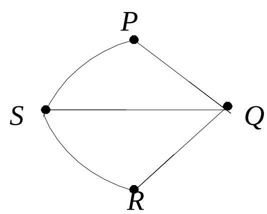
- Ada beberapa terminologi graf yang perlu diketahui, antara lain : ketetanggaan antara dua simpul, bersisian , derajat suatu simpul, dan lain-lain. Berikut ini adalah beberapa terminoogi yang penting, yaitu :

Termonologi Graf (cont)

1. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi.

Contoh :



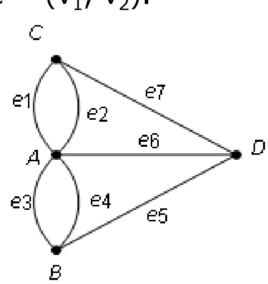
Pada graf disamping : simpul P bertetangga dengan simpul Q dan S, tetapi simpul P tidak bertetangga dengan simpul R.

Termonologi Graf (cont)

2. Bersisian (*Incidency*)

Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$.

Contoh :



Perhatikan graf dari masalah jembatan Konigsberg disamping

maka e_1 bersisian dengan simpul A dan simpul C, tetapi sisi tersebut tidak berisian dengan simpul B.

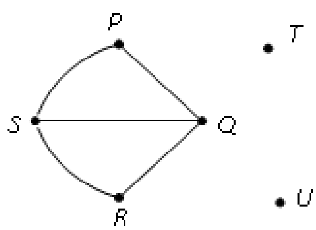
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

3. Simpul Terpencil (Isolated Vertex)

Jika suatu simpul tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya maka simpul tersebut dinamakan simpul terpencil.

Contoh :



Simpul T dan simpul U merupakan simpul terpencil.

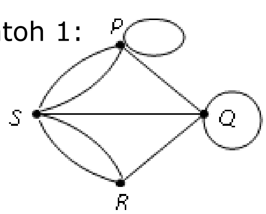
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

- 4. Derajat (Degree)

Derajat suatu simpul merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Misalkan, suatu simpul v mempunyai 3 buah sisi yang bersisian dengannya maka dapat dikatakan simpul tersebut berderajat 3, atau dinotasikan oleh d(v) = 3.

Contoh 1:



Pada graf disamping :
d(P) = d(Q) = d (S)= 5, sedangkan d(R) = 3.

Derajat sebuah simpul pada suatu graf berarah dijelaskan sebagai berikut :
$d_{in}(v)$ merupakan jumlah busur yang masuk ke simpul v
$d_{out}(v)$ merupakan jumlah busur yang keluar dari simpul v

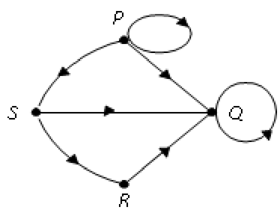
Dengan demikian derajat pada simpul tersebut, diperoleh :
$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

4. Derajat (Degree)

Contoh 2:



Pada graf diatas :

d_{in} (P) = 1 dan d_{out} (P) = 3 maka d (P) = 4
d_{in} (Q) = 4 dan d_{out} (Q) = 1 maka d (Q) = 5
d_{in} (R) = 1 dan d_{out} (R) = 1 maka d (R) = 2
d_{in} (S) = 1 dan d_{out} (S) = 2 maka d (S) = 3

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Jika G = (V, E) merupakan suatu graf, maka dapat ditulis :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

4. Derajat (Degree)

Contoh 3:

Perhatikan graf pada contoh 1. Jumlah sisi pada graf tersebut adalah 9, sehingga Jumlah derajat pada graf tersebut adalah :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.|E| \quad \text{Atau} \quad \sum_{v \in V} d(v) = d(P) + d(Q) + d(R) + d(S)$$

$$= 2.9 \qquad = 5 + 5 + 5 + 3$$

$$= 18 \qquad = 18$$

Perhatikan graf pada contoh 2.
Jumlah sisi pada graf tersebut adalah 7, sehingga Jumlah derajat pada graf tersebut adalah :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.|E| = 2.7 = 14 \quad \text{Atau} \quad \sum_{v \in V} d(v) = d(P) + d(Q) + d(R) + d(S)$$

$$= 4 + 5 + 2 + 3 = 14$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

- 4. Derajat (Degree)

Contoh 3:

Dengan demikian, jika kita ingin menggambar sebuah graf dengan derajat masing-masing simpul diketahui, dan ternyata jumlah derajat seluruh simpul tersebut adalah ganjil maka hal ini tak mungkin terjadi.

25 8/29/2014

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

5. Lintasan (*Path*)

Jalur dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G merupakan barisan sebuah sisi atau lebih $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ pada G, dimana $x_0 = v_0$ dan $x_n = v_T$.

Pada suatu jalur tidak mengalami pengulangan sisi. Jalur dapat juga dinotasikan oleh simpul-simpul yang dilewati, yaitu :

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

26 8/29/2014

Termonologi Graf (cont)

5. Lintasan (*Path*)

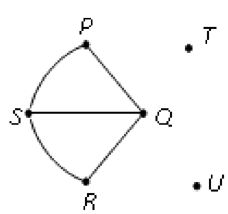
Jika jalur yang digunakan tidak melakukan pengulangan simpul maka jalur ini dinamakan **lintasan (*path*)**. Suatu lintasan dikatakan memiliki panjang n, jika lintasan ini memuat n buah sisi, yang dilewati dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G. Suatu jalur yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **Sirkuit (Circuit)**. Sementara itu, lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **silkus (*cycle*)**.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Termonologi Graf (cont)

5. Lintasan (*Path*)

Contoh:



Pada graf tersebut lintasan P, Q, R memiliki panjang 2. Sementara itu lintasan P, Q, S, R memiliki panjang 3. Lintasan P, Q, R, S, P dinamakan siklus dengan panjang 4. Antara simpul P dan U maupun T tidak dapat ditemukan lintasan.

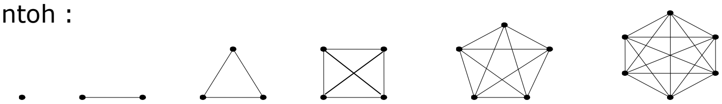
Panjang suatu siklus terpendek pada graf sederhana adalah tiga, artinya siklus tersebut harus melewati tiga sisi. Sedangkan, Panjang suatu siklus terpendek pada graf semu adalah satu, artinya siklus tersebutdapat berupa loop. Diameter suatu graf merupakan panjang lintasan terpanjang pada graf tersebut.

Beberapa Graf yang sering digunakan :

a. Graf Lengkap (Complete Graph)

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya. Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan Kn. Jumlah sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah n(n – 1)/2 sisi.

- Contoh :



Grap lengkap Kn, 1 ≤ n ≤ 6

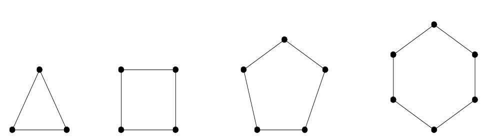
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

b. Graf Lingkaran (Cycle Graph)

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran n simpul dilambangkan dengan C_n.

Contoh :



Grap Lingkaran Cn, 3 ≤ n ≤ 6

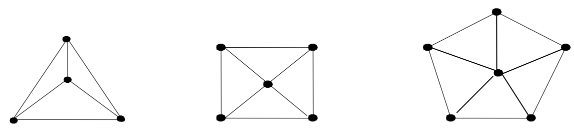
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

c. Graf Roda (Wheels Graph)

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran Cn, dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut.

Contoh :



Grap Roda Wn, 3 ≤ n ≤ 5

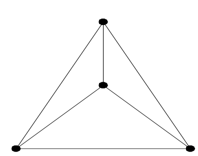
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

d. Graf Teratur (Regular Graphs)

Graf teratur merupakan graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul pada grap teratur adalah r, maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat r. Jumlah sisi pada graf teratur dengan n simpul adalah (nr/2) sisi.

Contoh :



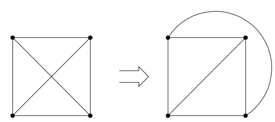
Graf Reguler Berderajat 3

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

e. Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)
Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf planar. Jika tidak, maka graf tersebut dinamakan graf tak-planar. Beberapa contoh dari graf planar adalah:
- Semua graf lingkaran merupakan graf planar
- Graf lengkap K1, K2, K3, K4 merupakan graf planar

Tetapi graf lengkap Kn untuk n ≥ 5 merupakan graf tak-planar.
Contoh :



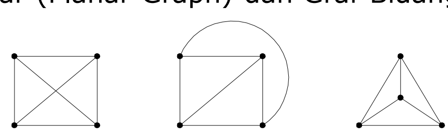
K_4 adalah graf planar

Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf bidang (plane graph).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

e. Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)



Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

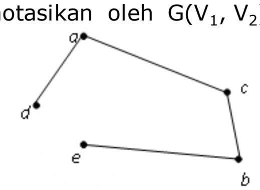
Beberapa hal tentang graf planar G(V, E), antara lain :
- (Formula Euler) Misalkan G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul, dan r merupakan jumlah daerah pada graf planar tersebut maka r = e – v + 2.
- Jika G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul (v ≥ 3) maka e ≤ 3v – 6 (ketaksamaan Euler).
- Jika G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul (v ≥ 3) dan tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 maka e ≤ 2v – 4.

Beberapa Graf yang sering digunakan :

f. Graf bipartit (Bipartite Graph)

Sebuah graf sederhana G dikatakan graf bipartit jika himpunan simpul pada graf tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang disjoint, misalkan V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2. Dengan demikian, pada grap bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau V_2. Graf bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$.

Contoh :



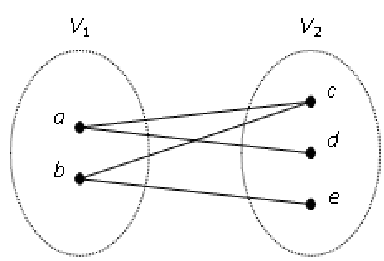
Graf diatas dapatdirepresentasikan menjadi graf bipartit $G(V_1, V_2)$, dimana $V_1 = \{a, b\}$ dan $V_2 = \{c, d, e\}$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

f. Graf bipartit (Bipartite Graph)

Representasi graf bipartit, dari graf pada contoh sebelumnya adalah :



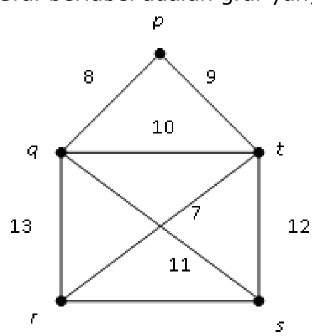
Graf bipartit

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Graf yang sering digunakan :

f. Graf Berlabel

Graf berlabel adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah label (bobot).



Graf K5 yang sisinya dilabeli

Graf dapat juga diberi label pada simpulnya, tergatung representasi label yang diberikan.

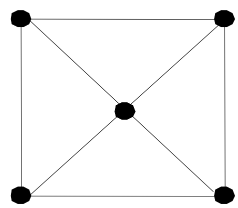
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Keterhubungan dan Sub Graf

- Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 pada suatu graf dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2. Jika setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V pada suatu graf G terdapat lintasan dari v_i dan v_j maka graf tersebut dinamakan graf terhubung (connected graph). Jika tidak, maka G dinamakan graf tak-terhubung (disconnected graph).

Contoh 1 :

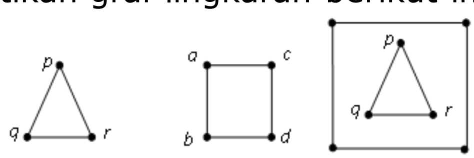
- Graf roda merupakan salah satu contoh graf terhubung:



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 2 :

- Perhatikan graf lingkaran berikut ini :



(i) (ii) (iii)

Jelas bahwa (i) C_3 dan (ii) C_4 merupakan graf terhubung. Sementara itu, graf (iii) merupakan graf tak-terhubung, karena tak ada lintasan yang menghubungkan simpul salah satu simpul pada {p, q, r} dengan salah satu simpul pada {a, b, c, d}.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

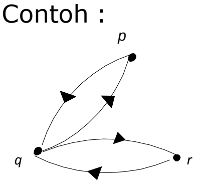
Keterhubungan Graf Bearah

- Selanjutnya, kita akan meninjau tentang keterhubungan pada suatu graf berarah. Suatu graf berarah G dikatakan terhubung jika kita menghilangkan arah pada graf tersebut (graf tak berarah) maka graf tersebut merupakan graf terhubung. Dua simpul, u dan v, pada graf berarah G disebut terhubung kuat (strongly connected) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u. Jika u dan v tidak terhubung kuat, dengan kata lain graf tersebut hanya terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan terhubung lemah (weakly connected). Jika setiap pasangan simpul pada suatu graf berarah graf berarah G terhubung kuat maka graf G tersebut dinamakan graf terhubung kuat (strongly connected graph). Jika tidak, graf tersebut dinamakan graf terhubung lemah.

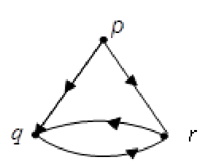
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Keterhubungan Graf Bearah

- Contoh :



Graf berarah terhubung kuat

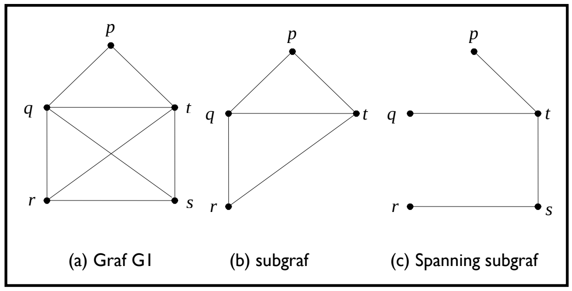


Graf berarah terhubung lemah

Misalkan G = (V, E) merupakan suatu graf, maka $G_1 = (V_1, E_1)$ dinamakan sub graf (subgraph) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komplemen dari sub graf G1 terhadap graf G adalah graf G2 = (V2, E2) sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya. Misalkan, $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan sub graf dari graf G = (V, E). Jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 memuat semua simpul dari G) maka G_1 dinamakan *Spanning Subgraph* (subraf merentang).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Keterhubungan Graf Bearah



Subgraf dan Spanning Subgraf dari Suatu Graf

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

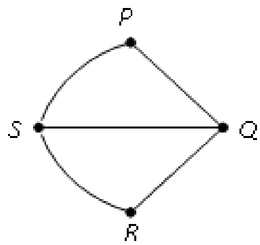
Matriks Ketetanggaan *(adjacency matrix)* & Matriks Bersisian *(incidency matrix)*

- Pada pembahasan sebelumnya, kita telah memperkenalkan bahwa dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi. Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana merupakan matriks bukur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada graf tersebut. Misalkan aij merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :
  - Jika a_{ij} = 1 maka hal ini berarti simpul i dan simpul j bertetangga.
  - Jika a_{ij} = 0 maka hal ini berarti simpul i dan simpul j tidak bertetangga.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh :

Perhatikan graf sederhana berikut ini :



Matriks ketetanggaan dari graf tersebut adalah sebagai berikut :

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\
\begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Terlihat bahwa matriks tersebut simetris dan setiap unsur diagonalnya adalah nol (0).

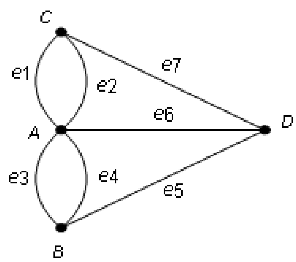
Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Matriks Ketetanggaan *(adjacency matrix)* & Matriks Bersisian *(incidency matrix)*

- Sementara itu, suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain e = (v_1, v_2). Seperti halnya matriks ketetanggaan, unsur-unsur matriks bersisian pun hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu), tapi tidak harus bujur sangkar. Hal ini disebabkan, baris dan kolom pada matriks bersisian, masing-masing merepresentasikan simpul dan sisi pada graf yang dimaksud. Misalkan aij merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :
  - Jika a_{ij} = 1 maka hal ini berarti simpul ke-i dan sisi ke-j adalah bersisian.
  - Jika a_{ij} = 0 maka hal ini berarti simpul ke-i dan sisi ke-j tidak bersisian.

Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



Bentuk matriks bersisian dari graf tersebut adalah :

$$
\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Eulerian dan Hamiltonian

- Sirkuit Euler

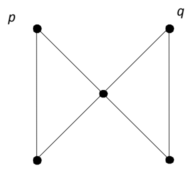
Sirkuit Euler merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Euler dinamakan graf Euler (*Eulerian graph*), sedangkan graf yang memuat suatu jalur Euler dinamakan graf semi Euler (*semi-Eulerian graph*).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Sirkuit Euler

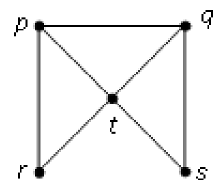
- Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



G1

Graf G_1 merupakan graf Euler. karena memiliki jalur yang membentuk sirkuit, yaitu : pr–rt–ts – sq – qt – tp .



G_2

Sementara itu, terlihat bahwa graf G_2 merupakan graf semi Euler karena graf tersebut memiliki jalur yang melalui masing-masing sisi didalam graf tersebut tepat satu kali. Jalur tersebut adalah : pq – qs – st – t – pr – rt – tq. 00

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Sifat Graf Eulerian dan Garf Semi Euler:

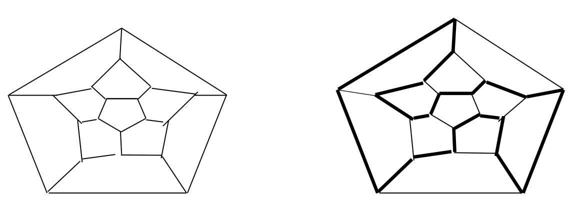
- Suatu graf G merupakan graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut berderajat genap.
- Graf terhubung G merupakan graf Semi Euler (memiliki jalur Euler) jika dan hanya jika di dalam graf tersebut terdapat dua simpul berderajat ganjil.
- Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf Euler jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama.
- Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf semi Euler jika dan hanya jika G terhubung setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama, kecuali dua simpul yaitu simpul petama (simpul awal jalur) memiliki derajat keluar satu lebih besar dari pada derajat masuk dan simpul yang kedua (simpul akhir) memiliki derajat masuk satu lebih besar dari pada derajat keluar.

Sirkuit Hamilton

- Sir Wiliam Hamilton pada tahun 1859 membuat permainan dodecahedron yang ditawarkan pada pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terdiri dari 12 buah pentagonal dan ada 20 titik sudut (setiap sudut diberi nama ibu kota setiap negara) . Permainan ini membentuk perjalanan keliling dunia yang mengunjungi setiap ibu kota Negara tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal. Ini tak lain adalah mencari sirkuit Hamilton.

Sirkuit Hamilton

- Masalah tersebut dapat diilustrasikan dalam gambar berikut ini :



Sirkuit Hamilton dari Suatu Graf

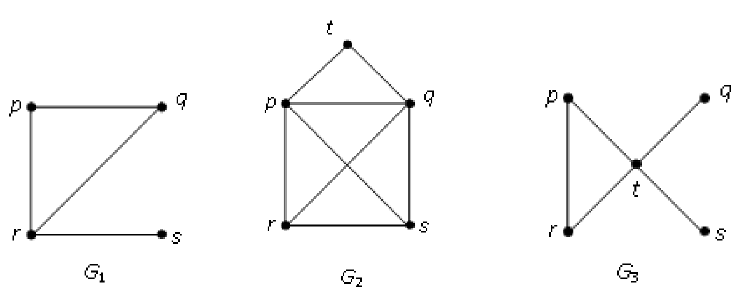
Sirkuit Hamilton

- Pada ilustrasi sebelumnya, sirkuit hamilton adalah lintasan yang dicetak tebal. Lintasan Hamilton suatu graf merupakan lintasan yang melalui setiap simpul dalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Hamilton.
- Dengan demikian, sirkuit Hamilton merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton (Hamiltonian graph), sedangkan graf yang memuat lintasan Hamilton dinamakan graf semi Hamilton (semi- Hamiltonian graph).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Sirkuit Hamilton

Contoh :
Perhatikan tiga graf dibawah ini



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Sirkuit Hamilton

- Graf G_1 merupakan graf semi Hamilton, lintasan hamiltonnya adalah :

  s – r – p – q – r.

- Sedangkan graf G2 merupakan graf hamilton, sirkuit hamiltonya adalah

  t – p – r – q – p – s – q – t .

- Sementara itu pada graf G3 tidak terdapat lintasan maupun sirkuit hamilton.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Graf Hamilton

- Misalkan G merupakan graf sederhana dengan jumlah simpulnya adalah n buah (dimana n paling sedikit tiga buah). Jika derajat setiap simpulnya paling sedikit n/2 simpul maka graf G tersebut merupakan graf Hamilton.

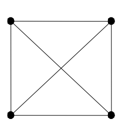
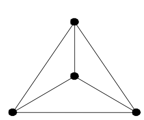
Beberapa hal tentang graf hamilton

- Setiap graf lengkap merupakan graf Hamilton.
- Pada suatu graf lengkap G dengan n buah simpul (n ≥ 3), terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit Hamilton.
- Pada suatu graf lengkap G dengan n buah simpul (n ≥ 3 dan n ganjil), terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan n ≥ 4, maka di dalam G terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Graf Isomorfik

Perhatikan dua graf berikut ini :

Dua buah graf diatas, terdiri dari empat buah simpul dimana setiap simpul adalah berderajat tiga. Walaupun secara geometri kedua tersebut berbeda tetapi pada prinsipnya kedua graf tersebut adalah sama. Ini dapat diperlihatkan saat simpul pada graf kedua yang berada di tengah ditarik keluar maka graf yang baru ini akan sama dengan graf pertama. Kedua graf ini dinamakan isomorfik. Dua graf yang isomorfik tak hanya kedua graf tersebut, masih banyak graf-graf yang lain yang isomorfik.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Graf Isomorfik

- Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada kedua graf tersebut dan antara sisi-sisi keduanya sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v pada G_1 maka sisi e' pada G_2 juga bersisian dengan simpul u' dan v'.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

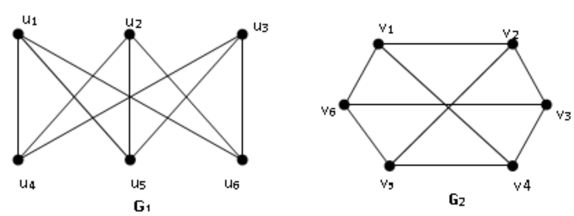
Graf Isomorfik

- Dua buah graf dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut :
  1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
  2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
  3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Graf Isomorfik

- Agar lebih mudah memahami apakah dua graf isomorfik atau tidak, berikut adalah cara menunjukan dua graf yang isomorfik.

Contoh :



Periksa apakah kedua graf tersebut isomorfik? Jika ya, tentukan simpul-simpul yang saling berkorespondensi antara G_1 dan G_2

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Graf Isomorfik

Jawab:

- Ya, kedua graf tersebut adalah isomorfik. Terlihat graf tersebut memuat simpul dimana setiap simpulnya masing-masing berderajat tiga. Simpul yang saling berkorespondensi dari kedua graf tersebut adalah :
  - simpul u1 dengan simpul v1
  - simpul u2 dengan simpul v3
  - simpul u3 dengan simpul v5
  - simpul u4 dengan simpul v6
  - simpul u5 dengan simpul v4
  - simpul u6 dengan simpul v2

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Graf Isomorfik

- Pada dua graf yang isomorfik, kedua graf tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama, tentunya setelah matriks yang berkorespondensi diurutakan dalam urutan yang sama. Perhatikan matriks ketetanggaan dari kedua graf tersebut. Dibawah ini adalah matriks ketetanggaan dari graf G_1 :

$$M_{G1} = \begin{array}{c} \\ u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u1 & u2 & u3 & u4 & u5 & u6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Graf Isomorfik

Sementara itu, berikut ini adalah matriks ketetanggaan dari graf G_2 :

$$M_{G2} = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v3 \\ v5 \\ v6 \\ v4 \\ v2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v1 & v3 & v5 & v6 & v4 & v2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

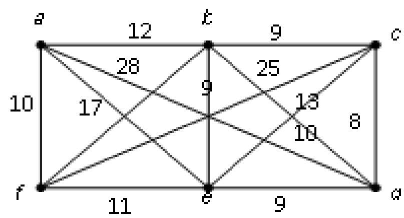
Terlihat bahwa kedua graf tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama, yaitu $M_{G1} = M_{G2}$.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Aplikasi Graf

a. Lintasan dan Jalur Terpendek

Misalkan G merupakan graf berbobot (weighted graph), yaitu setiap sisi dari graf G memiliki bobot tertentu, seperti pada ilustrasi dibawah ini :



Ilustrasi Lintasan Terpendek pada Graf

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Lintasan dan Jalur Terpendek

- Lintasan terpendek dari a ke d adalah 22, dengan lintasan a – b – d. Karena jika kita m enggunakan lintasan a – d, a – e – d, dan a – b – c – d maka lintasan itu memiliki bobot masing masing 28, 26, dan 29.
- Hal yang biasanya dilakukan adalah menentukan lintasan terpendekpada graf tersebut. Dengan kata lain, menentukan lintasan yang memiliki total bobot minimum.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Lintasan dan Jalur Terpendek

- Beberapa hal tersebut, contohnya :
  - Menentukan jarak terpendek/waktu tempuh tersingkat/ongkos termurah antara dua buah kota
  - Menentukan waktu tersingkat pengiriman pesan (message) antara dua buah terminal pada jaringan komputer.
  - Beberapa jenis persoalan lintasan terpendek, antara lain:
  - Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
  - Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
  - Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
  - Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

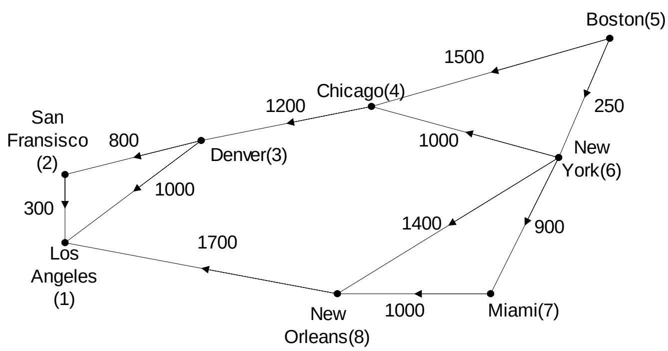
Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

- Algoritma Dijkstra merupakan suatu algoritma yang digunakan untuk menentukan lintasan terpendek dari suatu simpul ke semua simpul lain. Untuk mempermudah dalam pemahaman Algoritma Dijkstra, berikut ini [2] adalah graf dimana simpul-simpulnya merepresentasikan kota-kota di Amerika Serikat dan sisi dari graf tersebut merepresentasikan jarak antar dua kota (dalam kilometer).

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

- Contoh :



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

- Dengan menggunakan Algoritma Dijkstra akan ditentukan jarak terpendek dari kota Boston ke kota-kota yang lainnya.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	S								D							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
1	5	5	0	0	0	0	1	0	0	0	∞	∞	∞	1500	∞	250	∞	∞
2	6	5, 6	0	0	0	0	1	1	0	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
3	7	5, 6, 7	0	0	0	0	1	1	1	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
4	4	5, 6, 4	0	0	0	1	1	1	1	0	∞	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
5	8	5, 6, 8	0	0	0	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
6	3	5, 6, 4, 3	0	0	1	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
7	2	5, 6, 4, 3, 2	0	1	1	1	1	1	1	1	3350	3250	2450	1250	∞	250	1150	1650

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

- Jadi, lintasan terpendek dari:
  - 5 ke 6 adalah 5, 6 dengan jarak = 250 km
  - 5 ke 7 adalah 5, 6, 7 dengan jarak = 1150 km
  - 5 ke 4 adalah 5, 6, 4 dengan jarak = 1250 km
  - 5 ke 8 adalah 5, 6, 8 dengan jarak = 1650 km
  - 5 ke 3 adalah 5, 6, 4, 3 dengan jarak = 2450 km
  - 5 ke 2 adalah 5, 6, 4, 3, 2 dengan jarak = 3250 km
  - 5 ke 1 adalah 5, 6, 8, 1 dengan jarak = 3350 km

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Beberapa Aplikasi Graf

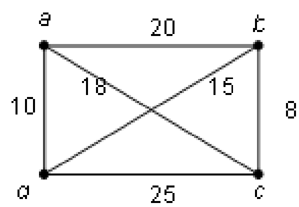
b. Persoalan Perjalanan Pedagang (Travelling Salesperson Problem - TSP)

Seperti halnya contoh pada (a), misalkan diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan ia harus menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan. Ini merupakan masalah menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

Persoalan Perjalanan Pedagang

Contoh :

Tentukan sirkuit dengan lintasan terpendek yang berasal dari garf lengkap K_4 berikut ini.

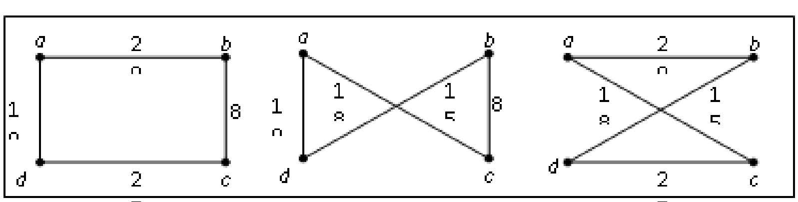


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Persoalan Perjalanan Pedagang

Jawab :

Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan n simpul: (n - 1)!/2. Graf di atas memiliki (4 – 1)!/2 = 3 sirkuit Hamilton, yaitu:



Persoalan Perjalanan Pedagang

Jawab :

- Sirkuit 1 = (a, b, c, d, a) memiliki panjang = 20 + 8 + 25 + 10 = 53
- Sirkuit 2 = (a, c, d, b, a) memiliki panjang = 18 + 8 + 15 + 10 = 51
- Sirkuit 3 = (a, c, b, d, a) memiliki panjang = 20 + 15 + 25 + 18 = 73

Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah sirkuit 2 = (a, c, d, b, a) atau (a, d, b, c, a) dengan panjang sirkuit adalah 51.

Beberapa Aplikasi Graf

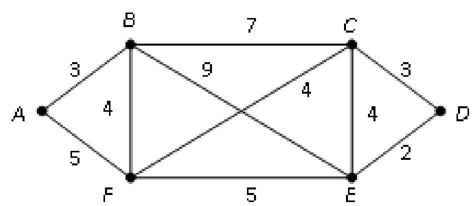
c. Persoalan Tukang Pos Cina (Chinese Postman Problem

Permasalahan ini, pertama kali dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962, yaitu : Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan. Permasalahan tersebut merupakan masalah menentukan sirkuit Euler di dalam suatu graf.

Persoalan Tukang Pos Cina

- Contoh :

Tentukan jalur yang dilalui oleh tukang pos, sehingga setiap jalan dilewati

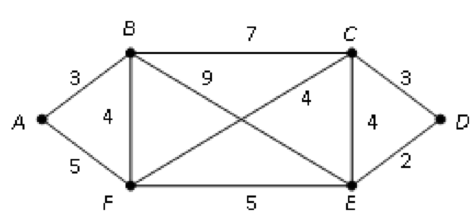


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Persoalan Tukang Pos Cina

- Contoh :

Tentukan jalur yang dilalui oleh tukang pos, sehingga setiap jalan dilewati



Jalur yang dilalui tukang pos adalah A, B, C, D, E, F, C, E, B, F, A

Rangkuman

1. Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut simpul (vertices, vertex) dan himpunan sisi (edges) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.
2. Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi.
3. Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Rangkuman

4. Derajat suatu simpul merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
5. Jalur dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G merupakan barisan sebuah sisi atau lebih $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ pada G, dimana $x_0 = v_0$ dan $x_n = v_T$. Pada suatu jalur tidak mengalami pengulangan sisi.
6. Jika jalur yang digunakan tidak melakukan pengulangan simpul maka jalur ini dinamakan lintasan (*path*). Suatu lintasan dikatakan memiliki panjang n, jika lintasan ini memuat n buah sisi, yang dilewati dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G.

Rangkuman

7. Suatu jalur yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan Sirkuit (Circuit). Sementara itu, lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan silkus (*cycle*).
8. Sirkuit Euler merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Euler dinamakan graf Euler (*Eulerian graph*), sedangkan graf yang memuat suatu jalur Euler dinamakan graf semi Euler (*semi-Eulerian graph*).

Rangkuman

9. Lintasan Hamilton suatu graf merupakan lintasan yang melalui setiap simpul dalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Hamilton.
10. Dua buah graf dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut :
    a. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
    b. Mempunyai jumlah sisi yang sama
    c. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu.


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU