Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Kode MK/ Nama MK

Matematika Diskrit

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Cakupan

- Himpunan,
- Relasi dan fungsi
- **Kombinatorial**
- Teori graf
- Pohon (*Tree*) dan pewarnaan graf

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

3 KOMBINATORIAL

- Tujuan

1. Mahasiswa memahami konsep dasar kombinatorik.
2. Mahasiswa membedakan permutasi dan kombinasi.
3. Mahasiswa dapat meyelesaikan berbagai persoalan yang terkait dengan kombinatorik.

Prinsip Dasar Menghitung

- Dua prinsip dasar yang digunakan dalam menghitung (counting) yaitu :
  - aturan pejumlahan
  - aturan perkalian.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Prinsip Penjumlahan

- "Jika suatu himpunan A terbagi kedalam himpunan bagian $A_1, A_2, \dots, A_n$, maka jumlah unsur pada himpunan A akan sama dengan jumlah semua unsur yang ada pada setiap himpunan bagian $A_1, A_2, \dots, A_n$."
- setiap himpunan bagian $A_1, A_2, \dots, A_n$ tidak saling tumpang tindih (saling lepas)

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 1 :

- Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6. Jika jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang, maka jumlah murid yang diajar guru tersebut adalah 25 + 27 + 20 = 72 murid.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 2 :

- Seorang mahasiswa ingin membeli sebuah motor. Ia dihadapkan untuk memilih pada satu jenis dari tiga merk motor, Honda 3 pilihan, Suzuki 2 pilihan, dan Yamaha 2 pilihan. Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak 3 + 2 + 2 = 7 pilihan.

Prinsip Perkalian

- Misalkan sebuah prosedur dapat dipecah dalam dua penugasan.
- Penugasan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan tugas kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara setelah tugas pertama dilakukan. Dengan demikian, dalam mengerjakan prosedur tersebut ada (n_1 x n_2) cara.
- Secara tidak langsung, pada prinsip perkalian, himpunan yang dioperasikan tak perlu saling lepas.

Contoh 1 :

- Berapa banyak string dengan panjang tujuh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1)
- Jawab :

Setiap suku pada string tersebut mempunyai dua kemungkinan, yaitu 0 atau 1.

Dengan demikian, pada pemilihan string dengan panjang tujuh dapat dilakukan dengan :

2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 27

= 128 string.

Contoh 2 :

- Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6.
- Misalkan, jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang.
- Jika guru tersebut ingin memilih tiga orang murid dari anak didiknya, dimana seorang murid dari setiap kelas,
- maka guru tersebut mempunyai 25 x 27 x 20 = 13.500 cara dalam memilih susunan tiga murid tersebut.

Contoh 3 :

- Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) dimana
  a) semua angkanya berbeda
  b) boleh ada angka yang berulang.
- Jawab :
  a) posisi satuan : 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
  posisi ribuan : 8 kemungkinan angka (1 sampai 9 kecuali angka yang telah dipilih)
  posisi ratusan : 8 kemungkinan angka
  posisi puluhan : 7 kemungkinan angka
  maka banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1,3,5, 7 dan9);

posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)

posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

maka banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah (5)(9)(10)(10) = 4500

Contoh 4 :

Password suatu login pada sistem komputer panjangnya lima sampai tujuh karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf (huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan) atau angka. Berapa banyak password yang dapat dibuat untuk suatu login ?

Jawab :

Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A– Z)dan banyak angka adalah 10(0-9) , jadi seluruhnya 36 karakter.

Untuk password dengan panjang 5 karakter, jumlah kemungkinan password adalah(36)(36)(36)(36)(36) = 365 = 60.466.176

untuk password dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan password adalah (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 366 = 2.176.782.336

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

dan untuk password dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan password adalah

(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 367 = 78.364.164.096

Jumlah seluruh password yang mungkin adalah

60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096 = 80.601.412.608 buah.

Jadi, untuk suatu login akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan password.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

- Jumlah seluruh password yang mungkin adalah
  - 60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096 =

    80.601.412.608 buah.
- Jadi, untuk suatu login akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan password.

- Ketika dua proses dikerjakan dalam waktu yang sama, kita tidak bisa menggunakan prinsip penjumlahan untuk menghitung jumlah cara untuk memilih salah satu dari dua proses tersebut. Untuk menghitung proses tersebut, kita harus mengenal prinsip inklusi-eksklusi.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh :

Berapa banyak byte yang dapat disusun oleh 8-bit, yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '00'?

Jawab :Misalkan,

A adalah himpunan byte yang dimulai dengan '11',

B adalah himpunan byte yang diakhiri dengan '00',

$A \cap B$ adalah himpunan byte yang berawal dengan '11' dan berakhir dengan '00',

dan $A \cup B$ adalah himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '00'

Maka jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan A adalah

$(1)(1)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^6$

Tulis, $|A| = 2^6 = 64$

Sementara itu, jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan B adalah (2)(2)(2)(2)(2)(2)(1)(1) = 2^6

Jadi, $|B| = 2^6 = 64$,

Dengan cara yang sama, jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan

$A \cap B$ adalah (1)(1)(2)(2)(2)(2)(1)(1) = 2^4

Sehingga $|A \cap B| = 2^4 = 16$. maka

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= 64 + 64 - 16 = 112$.

Dengan demikian, jumlah byte yang dapat disusun oleh 8-bit, yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '00' adalah 112 buah.

Permutasi dan Kombinasi

- **Permutasi**
- Suatu permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi prinsip perkalian.
- Misalkan diberikan suatu himpunan A dengan jumlah anggota adalah n, maka susunan terurut yang terdiri dari r buah anggota dinamakan permutasi-r dari A, ditulis P(n, r).

- Jika $r > n$,

  jelas bahwa $P(n, r) = 0$, karena tak mungkin menyusun r anggota dari A yang hanya terdiri dari n buah anggota dimana $n < r$.

- Jika $r \leq n$,

  Unsur pertama permutasi dapat dipilih dengan n cara karena terdapat n objek dalam himpunan.

  Unsur permutasi kedua dipilih dari $n - 1$ objek, adalah dengan $n - 1$ cara, karena satu anggota telah terpilih.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Demikian pula usur ketiga permutasi dipilih dari $n-2$ objek, adalah dengan n-2 cara, karena dua anggota telah terpilih. Hal ini dilakukan terus menerus sehingga urutan terakhir dipilih dari $(n-r+1)$objek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, pemilihan objek dalam susunan r buah objek dari n buah objek dapat dilakukan dengan :

- $n(n - 1) (n - 2) \ldots (n - r + 1)$ cara

- Dengan demikian, permutasi r objek dari n buah objek adalah jumlah kemungkinan urutan r buah objek yang dipilih dari n buah objek, dengan $r \leq n$, pada setiap kemungkinan penyusunan r buah objek tidak ada urutan objek yang sama, yaitu :

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 1 :

Misalkan S = {p, q, r}. Berapa cara yang mungkin dalam penyusunan dua huruf pada S sehingga tidak ada urutan yang sama ?

Jawab :

Susunan dua huruf yang mungkin adalah :pq, pr, qr, qp, rp, rq

Jadi penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara.

- Dalam penyusunan ini, dapat menggunakan definisi permutasi, yaitu :

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3.2.1}{1} = 6$$

- Dengan menggunakan definisi permutasi, penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara.

Contoh 2 :

- Misalkan kita mempunyai lima buah bola dengan warna yang berbeda satu sama lain dan 3 buah kotak.
- Kita akan memasukan bola tersebut kedalam kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola.
- Berapa jumlah urutan bola dengan warna berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Jawab :

- kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);
- kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan);
- kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 3 bola (ada 3 pilihan).
- Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (5)(4)(3) = 60

- Jika menggunakan definisi permutasi maka :

$$
\begin{aligned}
P(5, 3) &= \frac{5\,!}{(5-3)\,!} \\
&= \frac{5.4.3\,.2.1}{2.1} \\
&= 60
\end{aligned}
$$

Kombinasi

- Misalkan r merupakan unsur bilangan bulat tak negatif. Yang dimaksud dengan kombinasi r dari suatu himpunan B yang terdiri dari n anggota (objek) yang berbeda adalah jumlah himpunan bagian dari B yang memiliki anggota r buah objek.
- Interpretasi yang lain tentang kombinasi adalah menyusun (memilih) objek sejumlah r dari n buah objek yang ada.

Contoh 1 :

- Misalkan A = {p, q, r }, tentukan semua himpunan bagian dari A yang memiliki kardinalitas dua.
- Jawab :

  Himpunan bagian tersebut antara lain : {p, q}, {p, r}, dan {q, r}.

  Jadi kita mempunyai kombinasi :pq, pr, dan qr

Pada himpunan, urutan unsur pada himpunan tidak diperhatikan. Dengan demikian, kombinasi 2 dari himpunan A (penyusunan dua huruf tanpa memperhatikan urutan) adalah 3, yaitu pq, pr, dan qr.

Ini berbeda, pada saat kita mendefinisikan permutasi (urutan diperhatikan), penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara, yaitu pq, pr, qr, qp, rp, dan rq.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 2 :

Misalkan ada 2 buah bola yang berwarna sama dan 3 buah kotak. Bola akan dimasukan ke dalam kotak sehingga setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola. Berapa jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak tersebut ?

Jawab :Misalkan ketiga kotak tersebut ditaruh memanjang, maka ada 3 cara memasukan dua bola tersebut kedalam kotak, yaitu :

Cara I : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak pertama (kotak I dan kotak II).

Cara II : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak yang paling ujung (kotak I dan kotak III) .

Cara III : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak terakhir (kotak II dan Kotak III) .

Ini merupakan rumus umum kombinasi yang dinotasikan oleh C(n,r) atau $\binom{n}{r}$

- Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak adalah :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Ini merupakan rumus umum kombinasi yang dinotasikan oleh C(n,r) atau $\binom{n}{r}$

- Diketahui ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama) akan dimasukan kedalam n buah kotak. Misalnya komposisi bola tersebut adalah :
- n_1 bola berwarna 1,
- n_2 bola berwarna 2,
- n_k bola berwarna k,
- jadi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

- Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maksimum satu buah bola) ?
- Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah

  P(n, n) = n!.

  Dari pengaturan n buah bola itu,

  ada n_1! cara memasukkan bola berwarna 1

  ada n_2! cara memasukkan bola berwarna 2

  :

  ada n_k! cara memasukkan bola berwarna k

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

- Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!..n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$$

- Cara lain:
- Ada C(n, n_1) cara untuk menempatkan n_1 buah bola yang berwarna 1. Ada C(n – n_1, n_2) cara untuk menempatkan n_2 buah bola berwarna 2.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

- Ada $C(n - n_1 - n_3, n_3)$ cara untuk menempatkan n_3 buah bola berwarna 3.

:

- Ada $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$ cara untuk menempatkan n_k buah bola berwarna k.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

- Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:
- $C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2, n_3) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!} \ldots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Kombinasi Dengan Pengulangan

- Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

  Jumlah cara memasukkan bola C(n, r).

- Jika masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola), maka Jumlah cara memasukkan bola, yaitu :

  $C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh :

- 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?
- Jawab :

  $n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

  Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

  Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

  Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Koefisien Binomial

- Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, dengan teorema binomial, perpangkatan berbentuk $(x + y)^n$ dapat dijabarkan dalam bentuk segitiga Pascal berikut ini :

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = x + y$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

- Secara umum, diperoleh rumus sebagai berikut :

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1}\, y + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k}\, y^k + \ldots + C(n, n) y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\; x^{n-k} y^k$$

- Bilangan C(n, k) merupakan koefisien untuk $x^{(n-k)}y^k$ dinamakan koefisien binomial.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 1:

Jabarkan $(2x + y)^3$.

Jawab :

Misalkan $a = 2x$ dan $b = y$,

$(a + b)^3 = C(3, 0)\ a^3 + C(3, 1)\ a^2b^1 + C(3, 2)\ a^1b^2$

$+ C(3, 3)\ b^3$

$= 1(2x)^3 + 3\ (2x)^2(y) + 3(2x)(y)^2 + 1(y)^3$

$= 8\ x^3 + 12x^2\ y\ + 6x\ y^2 - y^3$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 2:

Jabarkan $(2x - 3)^3$.

Jawab :

Misalkan $a = 2x$ dan $b = -3$,

$(a + b)^3 = C(3, 0)\ a^3 + C(3, 1)\ a^2b^1 + C(3, 2)\ a^1b^2$
$+ C(3, 3)\ b^3$

$= 1(2x)^3 + 3(2x)^2(-3) + 3(2x)(-3)^2 + 1(-3)^3$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Contoh 3:

Tentukan suku kelima dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Jawab :

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku kelima dari hasil penjabaran adalah:

$C(5, 4)\ x^{5-4}\ (-y)^4 = -10\ x\ y^4$.

45 8/29/2014

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Rangkuman

1. Dua prinsip dasar yang digunakan dalam menghitung (counting) yaitu aturan pejumlahan dan aturan perkalian.
2. Suatu permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan.
3. Misalkan B terdiri dari n anggota (objek) yang berbeda. kombinasi r dari suatu himpunan B adalah jumlah himpunan bagian dari B yang memiliki anggota r buah objek.
4. Rumus permutasi r objek dari n buah objek adalah :

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

46 8/29/2014

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

5. Rumus kombinasi r dari n anggota himpunan dinotasikan oleh

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

6. Pada polinom $(x - y)^n$ maka bilangan $C(n, k)$ merupakan koefisien untuk $x^{(n-k)}y^k$ dan dinamakan koefisien binomial.

THANK YOU