

# Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

## Silabus :

Bab I Matriks dan Operasinya

Bab II Determinan Matriks

Bab III Sistem Persamaan Linear

Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang

Bab V Ruang Vektor

Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam

Bab VII Transformasi Linear

Bab VIII Ruang Eigen

# RUANG VEKTOR



## **Sub Pokok Bahasan**

- Ruang Vektor Umum
- Subruang
- Basis dan Dimensi
- Basis Subruang

## **Beberapa Aplikasi Ruang Vektor**

- Beberapa metode optimasi
- Sistem Kontrol
- *Operation Research*
- dan lain-lain

# Ruang Vektor Umum

Misalkan  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$  dan  $k, l \in \text{Riil}$

$V$  dinamakan **ruang vektor** jika terpenuhi aksioma :

1.  $V$  tertutup terhadap operasi penjumlahan

Untuk setiap  $\bar{u}, \bar{v} \in V$  maka  $\bar{u} + \bar{v} \in V$

$$2. \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$$

$$3. \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$$

4. Terdapat  $\bar{0} \in V$  sehingga untuk setiap  $\bar{u} \in V$   
berlaku  $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

5. Untuk setiap  $\bar{u} \in V$  terdapat  $(-\bar{u})$  sehingga  
$$\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$$



6.  $V$  tertutup thd operasi perkalian dengan skalar.

Untuk setiap  $\bar{u} \in V$  dan  $k \in \text{Riil}$  maka  $k\bar{u} \in V$

7.  $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

8.  $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$

9.  $k(l\bar{u}) = l(k\bar{u}) = (kl)\bar{u}$

10.  $1.\bar{u} = \bar{u}$



## Contoh :

1. Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).

Notasi :  $\mathbb{R}^n$  (Ruang Euclides orde  $n$ )

2. Himpunan matriks berukuran  $m \times n$  dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),

Notasi :  $M_{m \times n}$  (Ruang Matriks  $m \times n$ )

3. Himpunan polinom pangkat  $n$  dengan operasi standar.

Notasi :  $P_n$  (Ruang Polinom orde  $n$ )

# Ruang Euclides orde $n$

Operasi-Operasi pada ruang vektor Euclides:

- Penjumlahan

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

- Perkalian dengan skalar Riil sebarang ( $k$ )

$$k\bar{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

- Perkalian Titik (*Euclidean inner product*)

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

- Panjang vektor didefinisikan oleh :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

- Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh :

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

## Contoh :

Diketahui  $\bar{u} = (1, 1, 2, 3)$  dan  $\bar{v} = (2, 2, 1, 1)$

Tentukan panjang vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

## Jawab:

Panjang vektor :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Jarak kedua vektor

$$\begin{aligned}d(\bar{u}, \bar{v}) &= \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{7}\end{aligned}$$

Misalkan  $W$  merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor  $V$

$W$  dinamakan **subruang** (*subspace*)  $V$

jika  $W$  juga merupakan ruang vektor

yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Syarat  $W$  disebut subruang dari  $V$  adalah :

1.  $W \neq \{ \}$
2.  $W \subseteq V$
3. Jika  $\bar{u}, \bar{v} \in W$  maka  $\bar{u} + \bar{v} \in W$
4. Jika  $\bar{u} \in W$  dan  $k \in \text{Riil}$  maka  $k\bar{u} \in W$





## Contoh :

Tunjukkan bahwa himpunan  $W$  yang berisi semua matriks orde  $2 \times 2$  dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks  $2 \times 2$

## Jawab :

1.  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$  maka  $W \neq \{ \}$
2. Jelas bahwa  $W \subset M_{2 \times 2}$
3. Ambil sembarang matriks  $A, B \in W$

Tulis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa  $A + B \in W$

4. Ambil sembarang matriks  $A \in W$  dan  $k \in \text{Riil}$   
maka

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Ini menunjukkan bahwa  $kA \in W$

Jadi,  $W$  merupakan Subruang dari  $M_{2 \times 2}$ .



## Contoh :

Periksa apakah himpunan  $D$  yang berisi semua matriks orde  $2 \times 2$  yang determinannya nol merupakan subruang dari ruang vektor  $M_{2 \times 2}$

## Jawab :

Ambil sembarang matriks  $A, B \in W$

Pilih  $a \neq b$  :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ jelas bahwa } \det(A) = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ jelas bahwa } \det(B) = 0$$



Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

**Karena**  $a \neq b$

Maka  $\det(A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi  $D$  bukan merupakan subruang karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan



Sebuah vektor  $\bar{u}$

dinamakan **kombinasi linear** dari vektor – vektor

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$$

jika vektor – vektor tersebut

dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \dots + k_n\bar{v}_n$$

dimana  $k_1, k_2, \dots, k_n$  adalah skalar Riil.

# Contoh

Misal  $\bar{u} = (2, 4, 0)$ , dan  $\bar{v} = (1, -1, 3)$

adalah vektor-vektor di  $\mathbb{R}^3$ .

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

a.  $\bar{a} = (4, 2, 6)$

b.  $\bar{b} = (1, 5, 6)$

c.  $\bar{c} = (0, 0, 0)$



**Jawab :**

a. Tulis  $k_1\bar{u} + k_2\bar{v} = \bar{a}$

akan diperiksa apakah ada  $k_1, k_2$ ,  
sehingga kesamaan tersebut dipenuhi.

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$



dengan OBE, diperoleh:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dengan demikian,

$\vec{a}$  merupakan kombinasi linear dari vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$

atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$





b. Tulis :

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v} = \vec{b}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah tidak konsisten (tidak mempunyai solusi).

Jadi, tidak ada nilai  $k_1$  dan  $k_2$  yang memenuhi  
→ **b** tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari **u** dan **v**



c. Dengan memilih  $k_1 = 0$  dan  $k_2 = 0$ ,  
maka dapat ditulis

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear  
dari vektor apapun.



# Definisi membangun dan bebas linear

Himpunan vektor

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$$

dikatakan **membangun** suatu ruang vektor  $V$  jika setiap vektor pada  $V$  selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor – vektor di  $S$ .

## Contoh :

Tentukan apakah

$$\bar{v}_1 = (1, 1, 2),$$

$$\bar{v}_2 = (1, 0, 1), \text{ dan}$$

$$\bar{v}_3 = (2, 1, 3)$$

membangun  $V$ ???



**Jawab :**

Ambil sembarang vektor di  $\mathbb{R}^2$

misalkan  $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Tulis :

$$\bar{u} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + k_3 \bar{v}_3$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



Syarat agar dapat dikatakan kombinasi linear SPL tersebut harus mempunyai solusi (konsisten)

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

Agar SPL itu konsisten **haruslah**  $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang (unsur – unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor – vektor tersebut **tidak membangun**  $\mathbb{R}^3$

Misalkan  $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$

adalah himpunan vektor diruang vektor  $V$

$S$  dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*)

JIKA SPL homogen :

$$k_1 \bar{u}_1 + k_2 \bar{u}_1 + \dots + k_n \bar{u}_n = \bar{0}$$

hanya mempunyai satu solusi (tunggal), yakni

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 0, \quad k_n = 0$$

Jika solusinya tidak tunggal

maka  $S$  kita namakan himpunan tak bebas linear

(Bergantung linear / *linearly dependent*)





## Contoh :

Diketahui  $\vec{u} = (-1, 3, 2)$  dan  $\vec{a} = (1, 1, -1)$

Apakah saling bebas linear di  $\mathbb{R}^3$

## Jawab :

Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





dengan OBE dapat diperoleh :

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$$k_1 = 0, \text{ dan } k_2 = 0.$$

Ini berarti  $\bar{u}$  dan  $\bar{a}$  adalah saling bebas linear.



## Contoh :

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear  $\mathbb{R}^3$

## Jawab :

Tulis :

$$\bar{0} = k_1 \bar{a} + k_2 \bar{b} + k_3 \bar{c}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa

$k_1, k_2, k_3$  merupakan solusi tak hingga banyak

Jadi

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  adalah vektor-vektor yang bergantung linear.



# Basis dan Dimensi

Jika  $V$  adalah sembarang ruang vektor

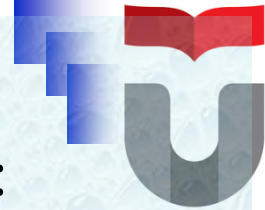
dan  $S = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \}$  merupakan

himpunan berhingga dari vektor – vektor di  $V$ ,

maka **S dinamakan basis bagi V**

Jika kedua syarat berikut dipenuhi :

- S membangun  $V$
- S bebas linear



## Contoh :

Tunjukkan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran  $2 \times 2$

## Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks koefisiennya (MK) = 48

- $\det(\text{MK}) \neq 0 \rightarrow$  SPL memiliki solusi untuk setiap  $a, b, c, d$

Jadi, M membangun  $M_{2 \times 2}$

- Ketika  $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0,$   
 $\det(\text{MK}) \neq 0 \rightarrow$  SPL homogen punya solusi tunggal.  
 Jadi, M bebas linear.



Karena  $M$  bebas linear dan membangun  $M_{2 \times 2}$  maka  $M$  merupakan basis bagi  $M_{2 \times 2}$ .

Ingat...

Basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal.

**Contoh :**

Untuk ruang vektor dari  $M_{2 \times 2}$ , himpunan matriks :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

juga merupakan basisnya.

Misalkan matriks :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

→ Vektor baris

→ Vektor kolom

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE



matriks  $A$  mempunyai **basis ruang kolom** yaitu :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

**basis ruang baris** diperoleh dengan cara,  
Mentransposkan terlebih dahulu matriks  $A$ ,  
lakukan OBE pada  $A^t$ , sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom-kolom pada matriks hasil OBE yang memiliki satu utama bersesuaian dengan matriks asal ( $A$ ).

Ini berarti,

matriks  $A$  tersebut mempunyai **basis ruang baris** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Dimensi basis** ruang baris = ruang kolom dinamakan **rank**.

Jadi rank dari matriks  $A$  adalah 2.

## Contoh :

Diberikan SPL homogen :

$$2p + q - 2r - 2s = 0$$

$$p - q + 2r - s = 0$$

$$-p + 2q - 4r + s = 0$$

$$3p - 3s = 0$$

Tentukan basis ruang solusi dari SPL diatas

## Jawab :

SPL dapat ditulis dalam bentuk :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$



lengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Solusi SPL homogen tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b$$

dimana  $a$ ,  $b$  merupakan parameter.



Jadi, basis ruang solusi dari SPL diatas adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensi dari basis ruang solusi dinamakan **nulitas**.

Dengan demikian, nulitas dari SPL diatas adalah 2.



## Latihan Bab 5

1. Nyatakanlah matriks  $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

sebagai kombinasi linear dari matriks berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Periksa, apakah himpunan berikut bebas linear !

a.  $\{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$

b.  $\{1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2\}$

3. Periksa, apakah himpunan  $A = \{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$  membangun polinom orde 2 !



4. Periksa, apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2 (P2)

a.  $\{4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2\}$

b.  $\{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2\}$

5. Misalkan

$$J = \left\{ a + bx + cx^2 \mid a^2 = b^2 + c^2 \right\}$$

merupakan himpunan bagian dari ruang vektor Polinom orde dua.

Periksa apakah  $J$  merupakan subruang

dari ruang vektor Polinom orde dua

Jika ya, tentukan basisnya



6. Diberikan SPL homogen :

$$p + 2q + 3r = 0$$

$$p + 2q - 3r = 0$$

$$p + 2q + 3r = 0,$$

Tentukan basis ruang solusi (buktikan)  
dan tentukan dimensinya.

7. Tentukan *rank* dari matriks :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$